Reflexionen auf Zweidrahtleitungen

Volker Aurich

1 Einleitung

Im Folgenden wird mathematisch präzise hergeleitet, wie sich Spannung und Strom längs einer verlustfreien Zweidrahtleitung, in die eine sinusförmige Schwingung eingespeist wird, ausbreiten. Daraus wird dann die Eingangsimpedanz der Leitung für gegebene Abschlussimpedanz berechnet. Unklare Begriffe von hin- und herlaufenden und reflektierten Leistungen oder Ähnliches sind dazu nicht notwendig. Es genügt, Spannungs-und Stromwellen zu betrachten. Die Darstellung lehnt sich an das Buch *E. Stadler: Hochfrequenztechnik, Vogel-Verlag 1973* an. Vorausgesetzt wird der elementare Umgang mit komplexen Zahlen.

Grundlagen

Wenn die linke Seite einer Gleichung durch die rechte definiert werden soll, verwenden wir wie in der Mathematik üblich vor dem Gleichheitszeichen einen Doppelpunkt. Beispiel: $f(x) := \sin(2\pi x)$. $\sqrt{-1}$ wird in der Mathematik meist mit i bezeichnet. Wir verwenden jedoch stattdessen j wie in der Elektrotechnik üblich.

Eine reellwertige harmonische Schwingung ist eine Funktion der Gestalt

$$f(t) = A\,\sin(\omega t + \varphi) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Dabei sind A, ω, φ und t reelle Zahlen. $A \geq 0$ heißt Amplitude, ω Kreisfrequenz ($= 2\pi$ mal Frequenz) und φ Phasenverschiebung. Im Folgenden wird die Variable t als Zeit interpretiert.

Weil sich $\sin$ und $\cos$ nur durch eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden, kann man f auch in der Form $f(t) = A\,\cos(\omega t + \psi)$ schreiben mit entsprechend geänderter Phasenverschiebung ψ.

Die folgenden Überlegungen lassen sich viel übersichtlicher formulieren, wenn man zu komplexwertigen harmonischen Schwingungen übergeht. Das liegt daran, dass die komplexe Exponentialfunktion die einfache Funktionalgleichung $e^{a+b} = e^a\,e^b$ für beliebige komplexe Zahlen a, b erfüllt. Sie ist viel einfacher als die Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$, die sich aber daraus herleiten lassen, wenn man zu Real- und Imaginärteil übergeht.

Damit gilt

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

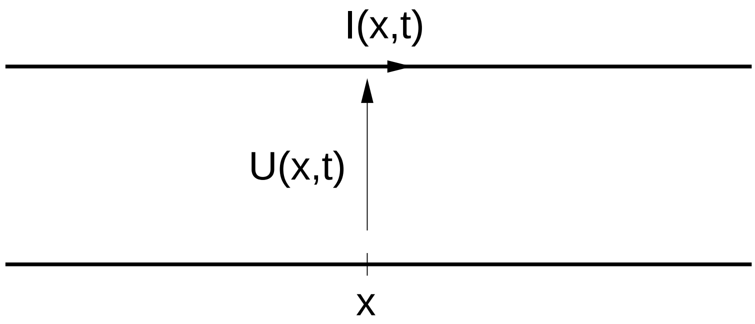
Eine komplexwertige harmonische Funktion ist eine Funktion der Gestalt

$$g(t) = A\,e^{j(\omega t + \varphi)} = A\,e^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

Dabei sei wieder $A \geq 0$. Die komplexe Zahl $A\,e^{j\varphi}$ heißt die (komplexwertige) Amplitude; ihr Betrag ist A. Die Phasenverschiebung ist also in den Winkel der Amplitude verschoben wurden. Das hat im Folgenden den rechentechnischen Vorteil, dass man bei der Analyse linearer Systeme nur diese komplexen Amplituden betrachten muss; der eigentliche Schwingungsanteil $e^{j\omega t}$ ist in allen Ausdrücken derselbe. Zu einer reellwertigen Schwingung kommt man zurück, indem man den Real- oder Imaginärteil bildet.

2 Die Paralleldrahtleitung

Untersucht wird der Spannungsverlauf auf einer Zweidrahtleitung, die an einer Stelle mit einer komplexen harmonischen Schwingung gespeist wird.



Es sei $U(x,t)$ die Spannung zwischen den beiden Drähten an der Stelle x zum Zeitpunkt t und analog $I(x,t)$ der Strom, der zum Zeitpunkt t an der Stelle x im oberen Leiter fließt.

Wenn an einem Ende der Leitung eine Spannung mit zeitlichem Verlauf $e^{j\omega t}$ angelegt wird, kann man experimentell messen, dass nach einer Einschwingzeit an jeder Stelle x der Spannungsverlauf ebenfalls eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω ist, allerdings kann die Amplitude vom Ort x abhängen. Bezeichnet man diese Amplitude an der Stelle x mit $\underline{U}(x)$, so gilt

$$U(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$$

Analoge Überlegungen kann man für den Strom I anstellen und erhält die Darstellung

$$I(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$$

wobei $\underline{I}(x)$ die Amplitude der Stromschwingung an der Stelle x ist.

Um den Amplitudenverlauf $\underline{U}$ und $\underline{I}$ längs der Leitung zu analysieren, werden wie üblich in der Physik die Änderungen näherungsweise berechnet, die sich aufgrund der physikalischen Eigenschaften der Leitung (Widerstand, Induktivität, Kapazität) bei Übergang von x zu $x + \triangle x$ ergeben. Durch den (physikalischen!) Grenzübergang $\triangle x \to 0$ ergibt sich dann:

Der Spannungsamplitudenverlauf $\underline{U}$ und der Stromamplitudenverlauf $\underline{I}$ längs der Leitung erfüllen die Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} = \alpha\,\underline{I} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x} = \beta\,\underline{U} \tag{2}$$

und folglich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\,\underline{U} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\underline{I} \tag{4}$$

Dabei sind α und β komplexe Zahlen, die sich aus den physikalischen Eigenschaften der Leitung berechnen lassen, und $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$. Es ist $\alpha = R' + j\omega L'$ und $\beta = G' + j\omega C'$; dabei sind R', L', G', C' die Dichtewerte (auch Belag genannt) entlang der Leiter von Widerstand und Induktivität eines Leiters bzw. Querleitwert und Kapazität der Leiter zueinander.

Im Falle einer verlustfreien Leitung sind $R' = 0$ und $G' = 0$, so dass

$$\alpha = j\omega L' \text{ und } \beta = j\omega C' \text{ und } \gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$$

Lösung

Wir definieren die zwei Funktionen

$$f^+(x) := e^{\gamma x} \qquad \text{und} \qquad f^-(x) := e^{-\gamma x}$$

Satz

Eine Funktion f ist genau dann eine Lösung von (3)

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\, f$$

wenn es komplexe Zahlen a und b gibt, so dass

$$f(x) = a\ \cdot f^+(x)\ +\ b\ \cdot f^-(x)$$

Angewendet auf den Spannungsamplitudenverlauf $\underline{U}$ längs der Leitung heißt das:
$\underline{U}$ lässt sich als Superposition von $e^{\gamma x}$ und $e^{-\gamma x}$ darstellen. Analoges gilt für den Stromamplitudenverlauf.
Es gibt also komplexe Zahlen u_h, u_r, i_h, i_r so, dass für den Spannungsamplituden- bzw. Stromamplitudenverlauf gilt

$$\underline{U}(x) = u_h\ \cdot e^{\gamma x}\ +\ u_r\ \cdot e^{-\gamma kx} \tag{5}$$

$$\underline{I}(x) = i_h\ \cdot e^{\gamma x}\ +\ i_r\ \cdot e^{-\gamma kx} \tag{6}$$

Für den Spannungs- bzw. Stromverlauf gilt somit

$$U(x,t) = u_h\ \cdot e^{\gamma x}\, e^{j\omega t}\ +\ u_r\ \cdot e^{-\gamma kx}\, e^{j\omega t} \tag{7}$$

$$I(x,t) = i_h\ \cdot e^{\gamma x}\, e^{j\omega t}\ +\ i_r\ \cdot e^{-\gamma kx}\, e^{j\omega t} \tag{8}$$

Wie wir später überlegen werden, ergeben sich die Werte u_h, u_r, i_h, i_r aus den Randbedingungen am Anfang und Ende der Leitung.

3 Wellen

Wir leiten eine anschauliche Interpretation der beiden Summanden in (7) her.

Dazu nehmen wir ab jetzt an, dass die Leitung **verlustfrei** ist.

Dann ist $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$. Wir definieren $k := \sqrt{L'C'}$, also $\gamma = j\omega k$.

Aus physikalischen Überlegungen, auf die wir nicht näher eingehen,folgt, dass auf einer verlustfreien Leitung $\frac{1}{k}$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich eine elektromagnetische Schwingung längs der Leitung fortpflanzt.

Der komplexe Spannungsverlauf $U(x,t)$ auf der Leitung hat dann die Gestalt

$$U(x,t) = u_h \cdot e^{j\omega kx}\, e^{j\omega t} \;+\; u_r \cdot e^{-j\omega kx}\, e^{j\omega t}$$

wobei u_h und u_r komplexe Zahlen sind.

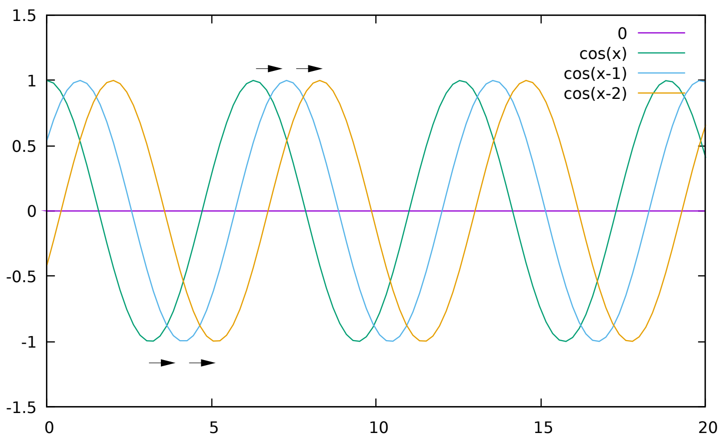
Für eine anschauliche Interpretation der Anteile

$$e^{j\omega kx}\, e^{j\omega t} \qquad \text{und} \qquad e^{-j\omega kx}\, e^{j\omega t}$$

gehen wir jetzt zum Realteil über.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{j\omega kx}\, e^{j\omega t}) &= \mathrm{Re}(e^{j\omega(kx+t)}) = \cos(\omega(kx+t)) \\ \mathrm{Re}(e^{-j\omega kx}\, e^{j\omega t}) &= \cos(\omega(-kx+t)) = \cos(\omega(kx-t)) \end{aligned}$$

Zu jedem Zeitpunkt t sind $\cos(\omega(kx+t))$ und $\cos(\omega(kx-t))$ die momentanen Spannungsverläufe in Abhängigkeit von x längs der Leitung. Wenn t zunimmt, bleibt die Kurvenform erhalten, sie wird lediglich verschoben, und zwar im Fall $\cos(\omega(kx+t))$ in negative x-Richtung und im Fall $\cos(\omega(kx-t))$ in positive x-Richtung. Daher spricht man von einer **hinlaufenden** und einer **zurücklaufenden Welle**.



Welche als hinlaufend und welche als zurücklaufend bezeichnet wird, hängt davon ab, welche Richtung die positive x-Richtung ist. Später werden wir sehen, dass es vorteilhaft sein kann, das Ende der Leitung, wo der Verbraucher angeschlossen ist, als Nullpunkt der x-Achse zu wählen und die positive x-Richtung zum Anfang der Leitung zeigen zu lassen.

Die Koeffizienten u_h und u_r bewirken lediglich, dass die beiden Grundwellen ein wenig in der Phase verschoben sind und ihre Amplituden unterschiedlich sein können. Auf die anschauliche Interpretation als wandernde Sinuskurven hat das keinen Einfluss. Allerdings kann sich das Aussehen der Superposition gewaltig ändern.

Beispiel:

Für $u_r = u_h \geq 0$ ergibt sich

$$U(x,t) = u_h\,(e^{j\omega kx} + e^{-j\omega kx})\,e^{j\omega t} = 2u_h\,\cos(\omega kx)\,e^{j\omega t}$$

also

$$\mathrm{Re}(U(x,t) = 2u_h \cos(\omega kx)\cos(\omega t)$$

Anschaulich bedeutet das: An jeder Stelle x ist der zeitliche Spannungsverlauf eine harmonische Schwingung, deren Amplitude nur vom Ort x abhängt. Es gibt also keine wandernde Welle, sondern nur eine sogenannte stehende Welle.

Wellenwiderstand

Wir definieren die Funktionen

$$\underline{U}_h(x) := u_h\,e^{j\omega kx} \qquad \text{und} \qquad \underline{U}_r(x) := u_r\,e^{-j\omega kx}$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\underline{U}_h}{\mathrm{d}x} = \gamma\,\underline{U}_h \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{U}_r}{\mathrm{d}x} = -\,\gamma\,\underline{U}_r$$

Setzt man das in Gleichung (1) ein, so ergibt sich für die Stromamplitudenverläufe

$$\underline{I}_h = \frac{\gamma}{\alpha}\,\underline{U}_h = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\underline{U}_h \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_r = -\frac{\gamma}{\alpha}\,\underline{U}_r = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\underline{U}_r$$

Mit $Z := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ gilt dann

$$\underline{U}_h = Z\,\underline{I}_h \qquad \text{und} \qquad \underline{U}_r = -Z\,\underline{I}_r \tag{9}$$

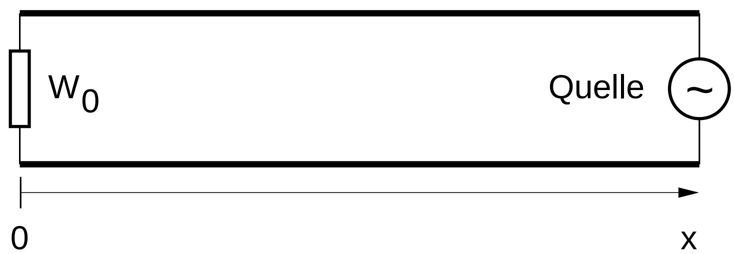
Deshalb nennt man Z den **Wellenwiderstand** der Leitung. Für eine verlustfreie Leitung, wie wir sie angenommen haben, ist Z reellwertig.

4 Reflexionen

Der Spannungsverlauf auf einer Leitung hängt davon ab, was an Anfang und Ende der Leitung angeschlossen ist. Dadurch werden die beiden Parameter u_h und u_r bestimmt in der Darstellung

$$\begin{aligned} U(x,t) &= u_h \cdot e^{j\omega kx}\, e^{j\omega t} \; + \; u_r \cdot e^{-j\omega kx}\, e^{j\omega t} \\ &= (u_h \cdot e^{j\omega kx} + u_r \cdot e^{-j\omega kx})\, e^{j\omega t} \\ &= \underline{U}(x)\, e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Leitung, bei der an einem Ende eine Impedanz W_0, der sog. Verbraucher, angeschlossen ist. Dort wählen wir den Nullpunkt der x-Koordinate. Am anderen Ende sei eine Spannungsquelle mit Kreisfrequenz ω angeschlossen. Die positive x-Richtung zeige vom Verbraucher zur Quelle. Wir setzen wieder voraus, dass die Leitung verlustfrei ist.



Wegen $e^0 = 1$ gilt für die Spannungsamplitude bei $x = 0$

$$\underline{U}(0) = u_h + u_r \tag{10}$$

und für die Stromamplitude entsprechend

$$\underline{I}(0) = i_h + i_r \tag{11}$$

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt

$$W_0\, \underline{I}(0) = \underline{U}(0) = u_h + u_r \tag{12}$$

und mit (10) bzw. (11) ergibt sich

$$Z \cdot \underline{I}(0) = Z \cdot (\underline{I}_h(0) + \underline{I}_r(0)) = \underline{U}_h(0) - \underline{U}_r(0) = u_h - u_r \tag{13}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \underline{I}(0) \cdot (W_0 + Z) &= 2\, u_h \\ \underline{I}(0) \cdot (W_0 - Z) &= 2\, u_r \end{aligned}$$

und schließlich

$$r := \frac{u_r}{u_h} = \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}$$

Diese komplexe Zahl r wird **Reflexionsfaktor** der Impedanz W bezüglich der Referenzimpedanz Z genannt wird.

Somit gilt für die Spannung zum Zeitpunkt t an der Stelle x

$$\begin{aligned} U(x,t) &= (u_h\, e^{j\omega kx} + r\, u_h\, e^{-j\omega kx})\, e^{j\omega t} \\ &= u_h\, e^{j\omega kx}(1 + r\, e^{-2j\omega kx})\, e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{14}$$

Fazit Die Spannungsverteilung $U(x,t)$ auf der Leitung ist durch die Abschlussimpedanz bis auf einen komplexen Faktor u_h bestimmt. Sie ergibt sich durch Addition der sog. hinlaufenden Welle $u_h\, e^{j\omega kx} e^{j\omega t}$ und der zurücklaufenden Welle $r\, u_h\, e^{-j\omega kx} e^{j\omega t}$. Der Faktor u_h wird durch die Amplitude und Phasenlage der Spannungsquelle gegeben.

Misst man an der Stelle x die komplexe Spannungsamplitude u_q, so gilt für die komplexe Amplitude u_h der hinlaufenden Welle

$$u_h = \frac{u_q}{e^{j\omega kx}(1 + r\, e^{-2j\omega kx})} \tag{15}$$

und die der zurücklaufenden Welle $u_r = r\, u_h$.

5 Impedanztransformation

Wir berechnen die Eingangsimpedanz W_x einer verlustfreien Leitung der Länge $x > 0$, wenn sie am Ende (bei $x = 0$) mit der Impedanz W_0 abgeschlossen ist.

In(14) wurde der Spannungsverlauf auf der Leitung berechnet. Den Stromverlauf kann man ähnlich berechnen.

$$\begin{aligned}
I(x,t) &= (\underline{I}_h(x) + \underline{I}_r(x))\, e^{j\omega t} \\
&= \frac{1}{Z}(\underline{U}_h(x) - \underline{U}_r(x))\, e^{j\omega t} \\
&= \frac{1}{Z}\,(u_h\, e^{j\omega kx} - u_r\, e^{-j\omega kx})\, e^{j\omega t} \qquad (16) \\
&= \frac{1}{Z}\,(u_h\, e^{j\omega kx} - r_0\, u_h\, e^{-j\omega kx})\, e^{j\omega t} \\
&= \frac{u_h}{Z}\, e^{j\omega kx}(1 - r_0\, e^{-2j\omega kx})\, e^{j\omega t} \qquad (17)
\end{aligned}$$

Aus (14) und (17) folgt

$$W_x = \frac{U(x,t)}{I(x,t} = Z\,\frac{1 + r_0\, e^{-2j\omega kx}}{1 - r_0\, e^{-2j\omega kx}} \qquad (18)$$

Dabei ist Z der Wellenwiderstand der Leitung und $r_0 = \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}$ der Reflexionsfaktor der Impedanz W_0 bezüglich des Wellenwiderstands Z ist.

Weil die Eingangsimpedanz nicht nur von der Impedanz der Leitung, sondern auch von der Länge der Leitung abhängt, *hängt auch der Eingangsreflexionsfaktor von der Länge ab*. Mit $\eta := e^{-2j\omega kx}$ ergibt sich aus (18) der Reflexionsfaktor r_x der Impedanz W_x bezüglich Z zu

$$\begin{aligned}
r_x &= \big(Z\frac{1 + r_0\,\eta}{1 - r_0\,\eta} - Z\big)\big(Z\frac{1 + r_0\,\eta}{1 - r_0\,\eta} + Z\big)^{-1} \\
&= \frac{1 + r_0\,\eta - (1 - r_0\eta)(1 - r_0\,\eta)}{(1 + r_0\,\eta + (1 - r_0\,\eta)(1 - r_0\,\eta)} \\
&= r_0\, e^{-2j\omega kx}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:
Der Betrag des Reflexionsfaktors $|r_x|$ ist längs der Leitung konstant.

Impedanztransformation durch eine Lambda/4-Leitung

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_L einer elektromagnetischen Schwingung auf einer Übertragungsleitung ist $\frac{1}{k}$. Sie ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Für eine Frequenz ν ist dementsprechend die Wellenlänge auf der Leitung $\lambda_L = \frac{v_L}{\nu}$ auch kleiner als die Wellenlänge im Vakuum. Somit gilt

$$\omega\, k\, x = 2\pi\nu\, k\, x = 2\pi\,\nu\,\frac{1}{v_L}x = 2\pi\frac{x}{\lambda_L}$$

$$\text{Für} \qquad x = \frac{\lambda_L}{4} \qquad \text{folgt} \qquad -\,2\,\omega\, k\,\frac{\lambda_L}{4} = -\pi$$

Beachtet man $e^{-j\,\pi} = -1$, so ergibt sich aus (18) für die Impedanz W am Anfang einer verlustfreien $\frac{\lambda}{4}$-Leitung mit Wellenwiderstand Z, die am Ende mit W_0 abgeschlossen ist

$$\begin{aligned} W &= Z\frac{1-r_0}{1+r_0} \\ &= Z\frac{1-\frac{W_0-Z}{W_0+Z}}{1+\frac{W_0-Z}{W_0+Z}} \\ &= Z\frac{W_0+Z-(W_0-Z)}{W_0+Z+(W_0-Z)} \\ &= Z\frac{2\,Z}{2\,W_0} \\ &= \frac{Z^2}{W_0} \end{aligned}$$

Das ist die bekannte Transformationsformel

$$W\,W_0 = Z^2$$

6 Leistungsübertragung

An der Abschlussimpedanz W_0 bei $x = 0$ beträgt die Spannung $\underline{U}(0)e^{j\omega t}$ und der Strom $\underline{I}(0)e^{j\omega t}$. Nach (10) gilt $\underline{U}(0) = u_h + u_r$ und nach (16) gilt $\underline{I}(0) = \frac{1}{Z}(u_h - u_r)$.

Für die komplexe Leistung ergibt sich also

$$\frac{1}{2}\underline{U}(0)\,\underline{I}(0)^* = \frac{1}{2Z}(u_h + u_r)(u_h^* - u_r^*) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2Z}(|u_h|^2 - |u_r|^2 + u_r u_h^* - u_h u_r^*) \tag{20}$$

wobei mit a^* der konjugiert komplexe Wert von a bezeichnet wird. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich, weil man mit den Effektivwerten der Amplituden rechnet.

Die Wirkleistung P in der Abschlussimpedanz ist der Realteil der komplexen Leistung. Wegen $u_h u_r^* = (u_r u_h^*)^*$ ist $u_r u_h^* - u_h u_r^*$ rein imaginär. Somit folgt

$$P = \frac{|u_h|^2}{2Z} - \frac{|u_r|^2}{2Z} \tag{21}$$

$$= \frac{|u_h|^2}{2Z}(1 - |r|^2) \tag{22}$$

Beispiele
Für $W_0 = Z$ gilt $r = 0$, d.h. die Amplitude der zurücklaufenden Welle ist Null. Die übertragende Wirkleistung ist maximal.

Für $W_0 = 0$ ist $r = -1$ d.h. die Amplitude der zurücklaufenden Welle ist das negative der Amplitude der hinlaufenden. Anders ausgedrückt: Hin- und zurücklaufende Welle haben den gleichen Amplitudenbetrag, sind aber um 180 Grad phasenverschoben. Die übertragene Wirkleistung ist Null.

Für $W = \infty$, also offenes Ende der Leitung, gilt $r = 1$ also $u_r = u_h$. Die übertragene Wirkleistung ist Null.

Fazit
Die Übertragung von Energie über die Leitung kann man allein mit den Feldern von Spannung und Strom erklären und analysieren. Um die in der Abschlussimpedanz erzeugte Wirkleistung zu berechnen, braucht man keine Begriffe wie irgendwelche hin- und herfließende Leistungen, die zwar gern verwendet, jedoch nicht präzisiert werden.