

## Zur Impedanz von Zweidrahtleitungen (01.12.2024)

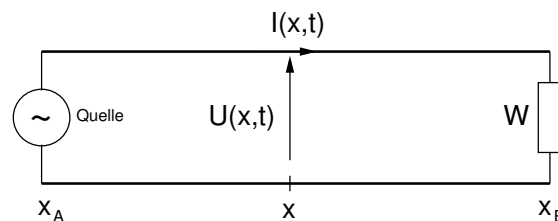
Volker Aurich

Immer wieder herrscht Verwirrung darüber, wie Energie mit Zweidrahtleitungen übertragen wird. Das rührt meist daher, dass die Begriffe Impedanz und Wellenwiderstand vermischt werden. Im Folgenden wird versucht, dies zu klären, ohne auf Mathematik zurückzugreifen, die nicht allen zugänglich ist. Trotz der damit verbundenen Unexaktheit bleibt der essenzielle Kern des mathematischen Modells (z.B. [1]) erhalten.

**Impedanz** Die Impedanz ist ein Begriff, der für Zweipole definiert wird, die folgendes Verhalten zeigen: Bei Anlegen einer sinusförmigen Spannung  $a \sin \omega t$  mit Amplitude  $a > 0$  und Kreisfrequenz  $\omega$  fließt ein Strom der Gestalt  $b \sin(\omega t + \varphi)$  mit Amplitude  $b$  und Kreisfrequenz  $\omega$ . Die *Impedanz* ist dann definiert als eine komplexe Zahl, nämlich  $\frac{a}{b}(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  (sofern  $b \neq 0$ ). Die Impedanz ist also lediglich eine Art Zusammenfassung des Amplitudenverhältnisses und der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom für ein sinusförmiges Signal. So ein Zweipol kann ein Bauteil sein, aber auch der Eingang einer Schaltung oder einer Leitung.

Die folgende Darstellung wird komplexe Zahlen vermeiden. Im mathematischen Modell verwendet man jedoch komplexwertige Signale der Gestalt  $a e^{j\omega t} = a(\cos \omega t + j \sin \omega t)$ , bei denen die Amplitude  $a$  eine komplexe Zahl ist, deren Winkel die Phasenverschiebung enthält. Denn für die Exponentialfunktion gilt die einfache Funktionalgleichung  $e^{z+w} = e^z e^w$ , mit der sich viel übersichtlicher rechnen lässt als mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus.

### Paralleldrahtleitung



$U(x, t)$  sei die Spannung zwischen den Drähten zum Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $x$ , und  $I(x, t)$  sei der Strom zum Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $x$  im oberen Draht.  $W$  sei die Impedanz eines bei  $x_E$  angeschlossenen Zweipols. Die Leitung sei verlustlos.

Wird am linken Ende bei  $x_A$  eine zeitlich veränderliche, sinusförmige Spannung mit Amplitude  $\underline{U}(x_A)$  und Kreisfrequenz  $\omega$  angelegt, dann ist  $U(x, t)$  an jeder beliebigen Stelle  $x$  ebenfalls eine Sinusschwingung, allerdings mit von  $x$  abhängiger Amplitude  $\underline{U}(x)$  und Phasenverschiebung  $\phi_U(x)$ , also  $U(x, t) = \underline{U}(x) \sin(\omega t + \phi_U(x))$ .

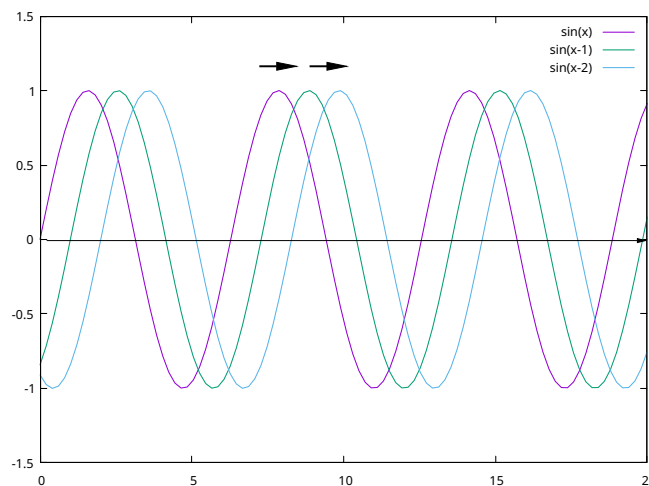
Ebenso ist an jeder Stelle  $x$  der Strom  $I(x, t)$  sinusförmig mit Kreisfrequenz  $\omega$  und von  $x$  abhängiger Amplitude  $\underline{I}(x)$  und Phasenverschiebung  $\phi_I(x)$ , also  $I(x, t) = \underline{I}(x) \sin(\omega t + \phi_I(x))$ .

Welche Amplituden und Phasenveränderungen auftreten können, hängt von den physikalischen Eigenschaften der Leitung ab. Aus einem physikalischen Modell kann man mit den Gesetzen der Elektrotechnik herleiten, welche mathematischen Eigenschaften  $U(x, t)$  und  $I(x, t)$  haben.

**Wellenwiderstand** Diese mathematische Modellierung führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der man weiß, dass man mit zwei sogenannten Basislösungen jede andere darstellen kann. In unserem Fall wählt man als Basislösungen die viel zitierten hin- bzw. rücklaufende Wellen

$$U_h(x, t) = \sin(\omega t + \omega k x) \quad \text{und} \quad U_r(x, t) = \sin(\omega t - \omega k x)$$

Sie unterscheiden sich dadurch, dass bei der einen die Phasenverschiebung  $\omega k x$  mit wachsendem  $x$  zunimmt, bei der anderen wegen des Minuszeichens abnimmt. Der Wert  $k > 0$  ist durch die physikalischen Eigenschaften der Leitung festgelegt. Zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  sind die Funktionen  $U_h(x, t_0)$  und  $U_r(x, t_0)$  Sinuskurven über der  $x$ -Achse. Eine Veränderung von  $t_0$  bewirkt lediglich eine Verschiebung längs der  $x$ -Achse.



Aus dem mathematischen Modell kann man auch berechnen, welche Ströme  $I_h(x, t)$  bzw.  $I_r(x, t)$  durch  $U_h(x, t)$  bzw.  $U_r(x, t)$  hervorgerufen werden (siehe [[1]]). Und da ergibt sich eine Besonderheit: Es gibt eine positive Zahl  $Z$  (falls die Leitung verlustlos ist, was wir voraussetzen), so dass gilt

$$U_h(x, t) = Z I_h(x, t) \quad \text{und} \quad U_r(x, t) = -Z I_r(x, t) \quad \text{für alle } x \text{ und } t$$

Das erinnert an die Definition von Widerstand im Ohmschen Gesetz; deshalb heißt  $Z$  auch *Wellenwiderstand* der Leitung. Dieser Zusammenhang zwischen Spannung und Strom auf der Leitung gilt aber nicht für alle möglichen Spannungs- und Stromfelder auf der Leitung!

**Impedanztransformation** Die Spannungswerte  $U$ , die man auf der Leitung messen kann, sind immer eine Überlagerung von  $U_h$  und  $U_r$  folgender Gestalt

$$U(x, t) = A_h \sin(\omega t + \omega k x + \varphi_h) + A_r \sin(\omega t - \omega k x + \varphi_r)$$

mit geeigneten Amplituden  $A_h, A_r$  und Phasenverschiebungen  $\varphi_h, \varphi_r$

Der entsprechende Stromverlauf ist

$$I(x, t) = \frac{A_h}{Z} \sin(\omega t + \omega k x + \varphi_h) - \frac{A_r}{Z} \sin(\omega t - \omega k x + \varphi_r)$$

Die vier Parameter  $A_h, A_r, \varphi_h, \varphi_r$  sind eindeutig bestimmt durch die Bedingungen am Anfang und Ende der Leitung. Das sind vier Bedingungen, die erfüllt sein müssen. Die Amplituden der Sinusschwingungen  $U(x_E, t)$  und  $I(x_E, t)$  am Ende  $x_E$  der Leitung und ihre Phasendifferenz müssen mit der Impedanz  $W$  zusammenpassen. Und die Amplitude und Phasenlage der Sinusschwingung  $U(x_A, t)$  am Anfang der Leitung müssen diejenigen der speisenden Signalquelle sein.

Die Werte  $U_h(x, t)$  und  $U_r(x, t)$  kann man nicht direkt auf der Leitung messen, außer im Fall  $W = Z$ , weil dann  $A_r = 0$ . Das macht man sich bei Richtkopplern zunutze, mit denen man zu  $U_h$  bzw.  $U_r$  proportionale Spannungen auskoppeln kann.

Durch die Randbedingungen am Anfang und Ende der Leitung sind somit automatisch die Amplitude und Phasenlage des Stroms  $I(x_A, t)$  am Eingang festgelegt und somit auch die Eingangsimpedanz der Leitung bei  $x_A$ . Sie ist im Allgemeinen von  $Z$  verschieden; es gilt nicht immer  $U(x_A, t) = Z I(x_A, t)$ .

Die Eingangsimpedanz lässt sich aus  $W, Z$  und der Länge der Leitung berechnen; die Herleitung ist nicht tiefstimmig, aber etwas mühsam. Daraus ergeben sich dann auch die wohlbekannten Spezialfälle für Leitungen mit halber oder viertel Wellenlänge bezogen auf die Kreisfrequenz  $\omega$ .

**Energieübertragung** Der Spannungsverlauf  $U(x_E, t)$  am Ende der Leitung kann in einem realen Verbraucher Energie abgeben. Der Wert der erzeugten Wirkleistung lässt sich aus dem Modell berechnen, am leichtesten wenn man von vornherein  $U$  und  $I$  komplexwertig ansetzt. Deren Produkt ist dann die komplexe Momentanleistung. Ihr Realteil am Leitungsende ist die Wirkleistung in der Abschlussimpedanz. Insofern kann man vom Fließen von Leistung reden. Wie eine analoge Begriffsbildung für Energie aussehen soll, ist nicht klar, weil der Begriff von Energie immer eine zeitliche Integration enthält.

Spannung, Strom und Momentanleistung sind Wellen, die sich überlagern und zu Null addieren können, wie man bei den Spannungsknoten von stehenden Wellen sieht. Bei Energie passiert dies nicht, weil sie nicht negativ sein kann. Deshalb ist die Vorstellung, dass in irgendeiner Weise Energie hin- und herläuft, keine zutreffende Beschreibung der Wirklichkeit.

Wir haben bisher nur den quasistationären Zustand betrachtet, der sich erst einige (kurze) Zeit nach dem Einschalten der speisenden Signalquelle ergibt. Aber auch der Einschwingvorgang lässt sich auf diese Weise zumindest anschaulich verstehen. Unmittelbar mit dem Anlegen der Spannungsquelle wird eine hinlaufende Welle obiger Art erzeugt, die mit dem Erreichen des Leitungsendes je nach Endimpedanz  $W$  dort eine rücklaufende Welle auslöst, die sich mit der hinlaufenden überlagert. Sobald sie den

Anfang  $x_A$  erreicht hat, gilt dann die obige Beschreibung, insbesondere auch in Bezug auf die Eingangsimpedanz der Leitung.

[1] E. Stadler: *Hochfrequenztechnik*, Vogel Verlag, 1973. Daran angelehnt  
<http://www.dk3pk.de/ham/Theory/reflexionen.pdf>