

Reflexionen über die Genauigkeit  
von SWR-Messungen mit dem Bruenekoppler

## 1 Einleitung

Im Folgenden soll der Spannungsverlauf auf einer Zweidrahtleitung, in die eine harmonische Schwingung eingespeist wird, mathematisch nachvollziehbar beschrieben werden. Vorausgesetzt wird der elementare Umgang mit komplexen Zahlen.

Wenn die linke Seite einer Gleichung durch die rechte definiert werden soll, verwenden wir wie in der Mathematik üblich vor dem Gleichheitszeichen einen Doppelpunkt. Beispiel:  $f(x) := \sin(2\pi x)$ .  $\sqrt{-1}$  wird in der Mathematik meist mit  $i$  bezeichnet. Wir verwenden jedoch stattdessen  $j$  wie in der Elektrotechnik üblich.

Eine reellwertige harmonische Schwingung ist eine Funktion der Gestalt

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Dabei sind  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $t$  reelle Zahlen.  $A \geq 0$  heißt Amplitude,  $\omega$  Kreisfrequenz (=  $2\pi$  mal Frequenz) und  $\varphi$  Phasenverschiebung. Im Folgenden wird die Variable  $t$  als Zeit interpretiert.

Weil sich  $\sin$  und  $\cos$  nur durch eine Phasenverschiebung um  $\frac{\pi}{2}$  unterscheiden, kann man  $f$  auch in der Form  $f(t) = A \cos(\omega t + \psi)$  schreiben mit entsprechend geänderter Phasenverschiebung  $\psi$ .

Die folgenden Überlegungen lassen sich viel übersichtlicher formulieren, wenn man zu komplexwertigen harmonischen Schwingungen übergeht. Das liegt daran, dass die komplexe Exponentialfunktion die einfache Funktionalgleichung  $e^{a+b} = e^a e^b$  für beliebige komplexe Zahlen  $a, b$  erfüllt. Sie ist viel einfacher als die Additionstheoreme für  $\sin$  und  $\cos$ , die sich aber daraus herleiten lassen, wenn man zu Real- und Imaginärteil übergeht.

Damit gilt

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

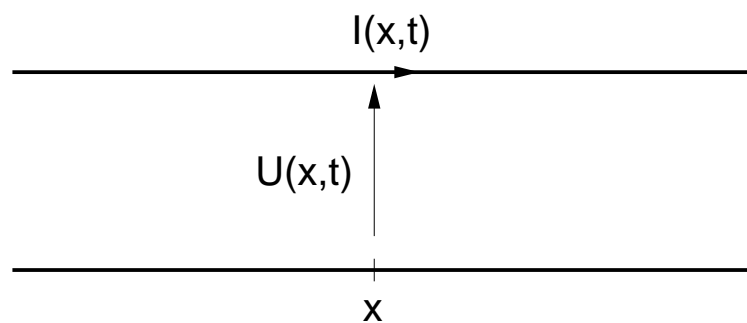
Eine komplexwertige harmonische Funktion ist eine Funktion der Gestalt

$$g(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

Dabei sei wieder  $A \geq 0$ . Die komplexe Zahl  $A e^{j\varphi}$  heißt die (komplexwertige) Amplitude; ihr Betrag ist  $A$ . Die Phasenverschiebung ist also in den Winkel der Amplitude verschoben wurden. Das hat im Folgenden den rechentechnischen Vorteil, dass man bei der Analyse linearer Systeme nur diese komplexen Amplituden betrachten muss; der eigentliche Schwingungsanteil  $e^{j\omega t}$  ist in allen Ausdrücken derselbe. Zu einer reellwertigen Schwingung kommt man zurück, indem man den Real- oder Imaginärteil bildet.

## 2 Die Paralleldrahtleitung

Untersucht wird der Spannungsverlauf auf einer Zweidrahtleitung, die an einer Stelle mit einer komplexen harmonischen Schwingung gespeist wird.



Es sei  $U(x, t)$  die Spannung zwischen den beiden Drähten an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  und analog  $I(x, t)$  der Strom, der zum Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $x$  im oberen Leiter fließt.

Wenn an einem Ende der Leitung eine Spannung mit zeitlichem Verlauf  $e^{j\omega t}$  angelegt wird, kann man experimentell messen, dass nach einer Einschwingzeit an jeder Stelle  $x$  der Spannungsverlauf ebenfalls eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz  $\omega$  ist, allerdings kann die Amplitude vom Ort  $x$  abhängen. Bezeichnet man diese Amplitude an der Stelle  $x$  mit  $\underline{U}(x)$ , so gilt

$$U(x, t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$$

Analoge Überlegungen kann man für den Strom  $I$  anstellen und erhält die Darstellung

$$I(x, t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$$

wobei  $\underline{I}(x)$  die Amplitude der Stromschwingung an der Stelle  $x$  ist.

Um den Amplitudenverlauf  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  längs der Leitung zu analysieren, werden wie üblich in der Physik die Änderungen näherungsweise berechnet, die sich aufgrund der physikalischen Eigenschaften der Leitung (Widerstand, Induktivität, Kapazität) bei Übergang von  $x$  zu  $\Delta x$  ergeben. Durch den (physikalischen!) Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  ergibt sich dann:

Der Spannungsamplitudenverlauf  $\underline{U}$  und der Stromamplitudenverlauf  $\underline{I}$  längs der Leitung erfüllen die Differentialgleichungen

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = \alpha \underline{I} \quad (1)$$

$$\frac{d\underline{I}}{dx} = \beta \underline{U} \quad (2)$$

und die sogenannte **Wellengleichung**

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \gamma^2 \underline{U} \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \gamma^2 \underline{I} \quad (4)$$

Dabei sind  $\alpha$  und  $\beta$  komplexe Zahlen, die sich aus den physikalischen Eigenschaften der Leitung berechnen lassen, und  $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ . Es ist  $\alpha = R' + j\omega L'$  und  $\beta = G' + j\omega C'$ ; dabei sind  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$ ,  $C'$  die Dichtewerte (auch Belag genannt) entlang der Leiter von Widerstand und Induktivität eines Leiters bzw. Querleitwert und Kapazität der Leiter zueinander.

Im Falle einer verlustfreien Leitung sind  $R' = 0$  und  $G' = 0$ , so dass

$$\alpha = j\omega L' \text{ und } \beta = j\omega C' \text{ und } \gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$$

## Lösung der Wellengleichungen

Wir definieren die zwei Funktionen

$$f^+(x) := e^{\gamma x} \quad \text{und} \quad f^-(x) := e^{-\gamma x}$$

### Satz

Eine Funktion  $f$  ist genau dann eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \gamma^2 f$$

wenn es komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  gibt, so dass

$$f(x) = a \cdot f^+(x) + b \cdot f^-(x)$$

Angewandt auf den Spannungsamplitudenverlauf  $\underline{U}$  längs der Leitung heißt das:

$\underline{U}$  lässt sich als Superposition von  $e^{\gamma x}$  und  $e^{-\gamma x}$  darstellen. Analoges gilt für den Stromamplitudenverlauf.

Es gibt also komplexe Zahlen  $u_h, u_r, i_h, i_r$  so, dass gilt für den Spannungsamplituden- bzw. Stromamplitudenverlauf gilt

$$\underline{U}(x) = u_h \cdot e^{\gamma x} + u_r \cdot e^{-\gamma k x} \quad (5)$$

$$\underline{I}(x) = i_h \cdot e^{\gamma x} + i_r \cdot e^{-\gamma k x} \quad (6)$$

Für den Spannungs- bzw. Stromverlauf gilt somit

$$U(x, t) = u_h \cdot e^{\gamma x} e^{j\omega t} + u_r \cdot e^{-\gamma k x} e^{j\omega t} \quad (7)$$

$$I(x, t) = i_h \cdot e^{\gamma x} e^{j\omega t} + i_r \cdot e^{-\gamma k x} e^{j\omega t} \quad (8)$$

Wie wir später überlegen werden, ergeben sich Werte  $u_h, u_r, i_h, i_r$  aus den Randbedingungen am Anfang und Ende der Leitung.

### 3 Wellen

Wir leiten eine anschauliche Interpretation der beiden Summanden in (7) her.

Dazu nehmen wir ab jetzt an, dass die Leitung **verlustfrei** ist.

Dann ist  $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$ . Wir definieren  $k := \sqrt{L'C'}$ , also  $\gamma = j\omega k$ .

Aus physikalischen Überlegungen, auf die wir nicht näher eingehen, folgt, dass auf einer verlustfreien Leitung  $\frac{1}{k}$  die Geschwindigkeit ist, mit der sich eine elektromagnetische Schwingung längs der Leitung fortpflanzt.

Der komplexe Spannungsverlauf  $U(x, t)$  auf der Leitung hat dann die Gestalt

$$U(x, t) = u_h \cdot e^{j\omega kx} e^{j\omega t} + u_r \cdot e^{-j\omega kx} e^{j\omega t}$$

wobei  $u_h$  und  $u_r$  komplexe Zahlen sind.

Für eine anschauliche Interpretation der Anteile

$$e^{j\omega kx} e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad e^{-j\omega kx} e^{j\omega t}$$

gehen wir jetzt zum Realteil über.

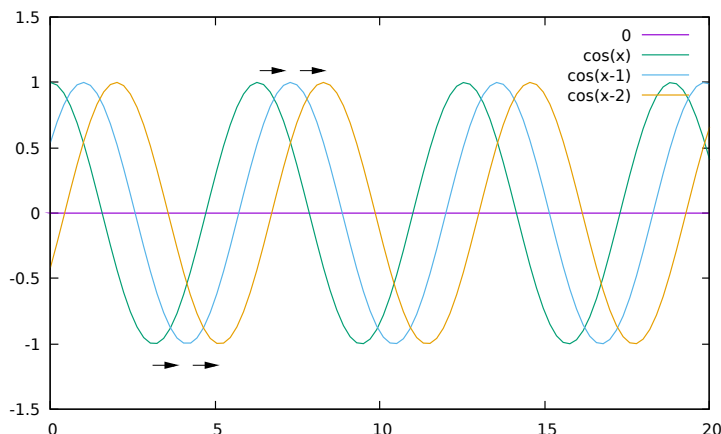
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{j\omega kx} e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}(e^{j\omega(kx+t)}) \\ &= \cos(\omega(kx+t)) \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{-j\omega kx} e^{j\omega t}) &= \cos(\omega(-kx+t)) \\ &= \cos(\omega(kx-t)) \end{aligned}$$

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  sind  $\cos(\omega(kx+t))$  und  $\cos(\omega(kx-t))$  die momentanen Spannungsverläufe in Abhängigkeit von  $x$  längs der Leitung. Wenn  $t$  zunimmt, bleibt die Kurvenform erhalten, sie wird lediglich verschoben, und zwar im Fall  $\cos(\omega(kx+t))$  in negative  $x$ -Richtung und im Fall  $\cos(\omega(kx-t))$  in positive  $x$ -Richtung. Daher spricht man von einer **hinlaufenden** und einer **zurücklaufenden Welle**.

Welche als hinlaufend und welche als zurücklaufend bezeichnet wird, hängt davon ab, welche Richtung die positive  $x$ -Richtung ist. Später werden wir sehen, dass es vorteilhaft sein kann, das Ende der Leitung, wo der Verbraucher angeschlossen ist, als Nullpunkt der  $x$ -Achse zu wählen und die positive  $x$ -Richtung zum Anfang der Leitung zeigen zu lassen.



Die Koeffizienten  $u_h$  und  $u_r$  bewirken lediglich, dass die beiden Grundwellen ein wenig in der Phase verschoben sind und ihre Amplituden unterschiedlich sein können. Auf die anschauliche Interpretation als wandernde Sinuskurven hat das keinen Einfluss. Allerdings kann sich das Aussehen der Superposition gewaltig ändern.

Beispiel:

Für  $u_r = u_h \geq 0$  ergibt sich

$$U(x, t) = u_h (e^{j\omega kx} + e^{-j\omega kx}) e^{j\omega t} = 2u_h \cos(\omega kx) e^{j\omega t}$$

also

$$\operatorname{Re}(U(x, t)) = 2u_h \cos(\omega kx) \cos(\omega t)$$

Anschaulich bedeutet das: An jeder Stelle  $x$  ist der zeitliche Spannungsverlauf eine harmonische Schwingung, deren Amplitude nur vom Ort  $x$  abhängt. Es gibt also keine wandernde Welle, sondern nur eine sogenannte stehende Welle.

### Wellenwiderstand

Wir definieren die Funktionen

$$\underline{U}_h(x) := u_h e^{j\omega kx} \quad \text{und} \quad \underline{U}_r(x) := u_r e^{-j\omega kx}$$

Es gilt

$$\frac{d\underline{U}_h}{dx} = \gamma \underline{U}_h \quad \text{und} \quad \frac{d\underline{U}_r}{dx} = -\gamma \underline{U}_r$$

Setzt man das in Gleichung (1) ein, so ergibt sich für die Stromamplitudenverläufe

$$\underline{I}_h = \frac{\gamma}{\alpha} \underline{U}_h = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \underline{U}_h \quad \text{und} \quad \underline{I}_r = -\frac{\gamma}{\alpha} \underline{U}_r = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \underline{U}_r$$

Mit  $Z := \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  gilt dann

$$\underline{U}_h = Z \underline{I}_h \quad \text{und} \quad \underline{U}_r = -Z \underline{I}_r \quad (9)$$

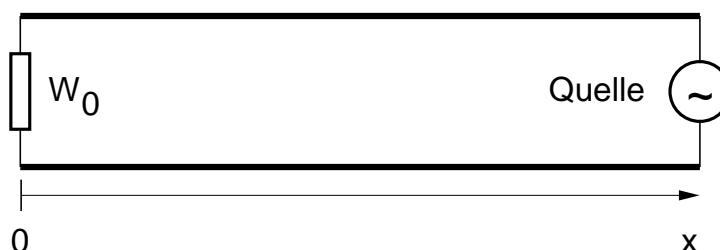
Deshalb nennt man  $Z$  den **Wellenwiderstand** der Leitung. Für eine verlustfreie Leitung, wie wir sie angenommen haben, ist  $Z$  reellwertig.

## 4 Reflexionen

Der Spannungsverlauf auf einer Leitung hängt davon ab, was an Anfang und Ende der Leitung angeschlossen ist. Dadurch werden die beiden Parameter  $u_h$  und  $u_r$  bestimmt in der Darstellung

$$\begin{aligned} U(x, t) &= u_h \cdot e^{j\omega kx} e^{j\omega t} + u_r \cdot e^{-j\omega kx} e^{j\omega t} \\ &= (u_h \cdot e^{j\omega kx} + u_r \cdot e^{-j\omega kx}) e^{j\omega t} \\ &= \underline{U}(x) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Leitung, bei der an einem Ende eine Impedanz  $W_0$ , der sog. Verbraucher, angeschlossen ist. Dort wählen wir den Nullpunkt der  $x$ -Koordinate. Am anderen Ende sei eine Spannungsquelle mit Kreisfrequenz  $\omega$  angeschlossen. Die positive  $x$ -Richtung zeige vom Verbraucher zur Quelle. Wir setzen wieder voraus, dass die Leitung verlustfrei ist.



Wegen  $e^0 = 1$  gilt für die Spannungsamplitude bei  $x = 0$

$$\underline{U}(0) = u_h + u_r \quad (10)$$

und für die Stromamplitude entsprechend

$$\underline{I}(0) = i_h + i_r \quad (11)$$

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt

$$W_0 \underline{I}(0) = \underline{U}(0) = u_h + u_r \quad (12)$$

und mit (10) bzw. (11) ergibt sich

$$Z \cdot \underline{I}(0) = Z \cdot (i_h(0) + i_r(0)) = \underline{U}_h(0) - \underline{U}_r(0) = u_h - u_r \quad (13)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \underline{I}(0) \cdot (W_0 + Z) &= 2 u_h \\ \underline{I}(0) \cdot (W_0 - Z) &= 2 u_r \end{aligned}$$



und schließlich

$$r := \frac{u_r}{u_h} = \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}$$

Diese komplexe Zahl  $r$  wird **Reflexionsfaktor** der Impedanz  $W$  bezüglich der Referenzimpedanz  $Z$  genannt wird.

Somit gilt für die Spannung zum Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $x$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= (u_h e^{j\omega kx} + r u_h e^{-j\omega kx}) e^{j\omega t} \\ &= u_h e^{j\omega kx} (1 + r e^{-2j\omega kx}) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (14)$$

**Fazit** Die Spannungsverteilung  $U(x, t)$  auf der Leitung ist durch die Abschlussimpedanz bis auf einen komplexen Faktor  $u_h$  bestimmt. Sie ergibt sich durch Addition der sog. hinlaufenden Welle  $u_h e^{j\omega kx} e^{j\omega t}$  und der zurücklaufenden Welle  $r u_h e^{-j\omega kx} e^{j\omega t}$ . Der Faktor  $u_h$  wird durch die Amplitude und Phasenlage der Spannungsquelle gegeben. Wenn die (ideale) Spannungsquelle an der Stelle  $x_q$  ist und die Spannung  $u_q e^{j\omega t}$  hat, so muss zu jedem Zeitpunkt gelten

$$\begin{aligned} u_q e^{j\omega t} &= U(x_q, t) \\ &= u_h \cdot e^{j\omega kx_q} e^{j\omega t} + u_r \cdot e^{-j\omega kx_q} e^{j\omega t} \\ &= u_h (e^{j\omega kx_q} + r \cdot e^{-j\omega kx_q}) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

und somit

$$u_h = \frac{u_q}{e^{j\omega kx_q} + r \cdot e^{-j\omega kx_q}}$$

Die Wirkleistungen  $P_h$  der hinlaufenden und  $P_r$  der zurücklaufenden Wellen in der Abschlussimpedanz sind jeweils proportional zum Quadrat der Amplitudenbeträge. Folglich gilt

$$\frac{P_r}{P_h} = \frac{|u_r|^2}{|u_h|^2} = |r|^2$$

### Beispiele

Für  $W = Z$  gilt  $r = 0$ , d.h. die Amplitude der zurücklaufenden Welle ist Null. Die übertragende Wirkleistung ist maximal.

Für  $W = 0$  ist  $r = -1$  d.h. die Amplitude der zurücklaufenden Welle ist das negative der Amplitude der hinlaufenden. Anders ausgedrückt: Hin- und zurücklaufende Welle haben den gleichen Amplitudenbetrag, sind aber um 180 Grad phasenverschoben. Die übertragene Wirkleistung ist Null.

Für  $W = \infty$ , also offenes Ende der Leitung, gilt  $r = 1$  also  $u_r = u_h$ . Die übertragene Wirkleistung ist Null.

## 5 Impedanztransformation

Wir berechnen die Eingangsimpedanz  $W_x$  einer verlustfreien Leitung der Länge  $x > 0$ , wenn sie am Ende (bei  $x = 0$ ) mit der Impedanz  $W_0$  abgeschlossen ist.

In(14) wurde der Spannungsverlauf auf der Leitung berechnet. Den Stromverlauf kann man ähnlich berechnen.

$$\begin{aligned}
 I(x, t) &= (\underline{I}_h(x) + \underline{I}_r(x)) e^{j\omega t} \\
 &= \frac{1}{Z} (\underline{U}_h(x) - \underline{U}_r(x)) e^{j\omega t} \\
 &= \frac{1}{Z} (u_h e^{j\omega kx} - u_r e^{-j\omega kx}) e^{j\omega t} \\
 &= \frac{1}{Z} (u_h e^{j\omega kx} - r_0 u_h e^{-j\omega kx}) e^{j\omega t} \\
 &= \frac{u_h}{Z} e^{j\omega kx} (1 - r_0 e^{-2j\omega kx}) e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt

$$W_x = \frac{U(x, t)}{I(x, t)} = Z \frac{1 + r_0 e^{-2j\omega kx}}{1 - r_0 e^{-2j\omega kx}} \tag{16}$$

Dabei ist  $Z$  der Wellenwiderstand der Leitung und  $r_0 = \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}$  der Reflexionsfaktor der Impedanz  $W_0$  bezüglich des Wellenwiderstands  $Z$  ist.

Weil die Eingangsimpedanz nicht nur von der Impedanz der Leitung, sondern auch von der Länge der Leitung abhängt, *hängt auch der Eingangsreflexionsfaktor von der Länge ab*. Mit  $\eta := e^{-2j\omega kx}$  ergibt sich aus (16) der Reflexionsfaktor  $r_x$  der Impedanz  $W_x$  bezüglich  $Z$  zu

$$\begin{aligned}
 r_x &= \left( Z \frac{1 + r_0 \eta}{1 - r_0 \eta} - Z \right) \left( Z \frac{1 + r_0 \eta}{1 - r_0 \eta} + Z \right)^{-1} \\
 &= \frac{1 + r_0 \eta - (1 - r_0 \eta)(1 - r_0 \eta)}{(1 + r_0 \eta + (1 - r_0 \eta)(1 - r_0 \eta))} \\
 &= r_0 e^{-2j\omega kx}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

**Der Betrag des Reflektionsfaktors  $|r_x|$  ist längs der Leitung konstant.**

### Impedanztransformation durch eine Lambda/4-Leitung

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_L$  einer elektromagnetischen Schwingung auf einer Übertragungsleitung ist  $\frac{1}{k}$ . Sie ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Für eine Frequenz  $\nu$  ist dementsprechend die Wellenlänge auf der Leitung  $\lambda_L = \frac{v_L}{\nu}$  auch kleiner als die Wellenlänge im Vakuum. Somit gilt

$$\omega k x = 2\pi\nu k x = 2\pi\nu \frac{1}{v_L} x = 2\pi \frac{x}{\lambda_L}$$

Für  $x = \frac{\lambda_L}{4}$  folgt  $-2\omega k \frac{\lambda_L}{4} = -\pi$

Beachtet man  $e^{-j\pi} = -1$ , so ergibt sich aus (16) für die Impedanz  $W$  am Anfang einer verlustfreien  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung mit Wellenwiderstand  $Z$ , die am Ende mit  $W_0$  abgeschlossen ist

$$\begin{aligned} W &= Z \frac{1 - r_0}{1 + r_0} \\ &= Z \frac{1 - \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}}{1 + \frac{W_0 - Z}{W_0 + Z}} \\ &= Z \frac{W_0 + Z - (W_0 - Z)}{W_0 + Z + (W_0 - Z)} \\ &= Z \frac{2Z}{2W_0} \\ &= \frac{Z^2}{W_0} \end{aligned}$$

Das ist die bekannte Transformationsformel

$$W W_0 = Z^2$$

## 6 Stehwellenverhältnisse

Für den Begriff Stehwellenverhältnis findet man unterschiedliche Definitionen.

1. Das Stehwellenverhältnis SWR auf einer Übertragungsleitung wird definiert als Quotient aus dem Maximum von  $|\underline{U}(x)|$  und dem Minimum von  $|\underline{U}(x)|$  über alle Stellen  $x$  längs der Leitung. Dabei wird stillschweigend angenommen, dass die Leitung mindestens die Länge  $\lambda/4$  hat; denn Maxima und Minima wechseln sich im Abstand  $\lambda/4$  ab. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{SWR} &= \frac{|u_h| + |u_r|}{|u_h| - |u_r|} && \longrightarrow \text{Warum?} \\ &= \frac{1 + \frac{|u_r|}{|u_h|}}{1 - \frac{|u_r|}{|u_h|}} \end{aligned}$$

2. Das Stehwellenverhältnis  $v$  einer Impedanz  $W$  bezüglich einer Referenzimpedanz  $Z$  wird definiert als

$$v = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$

wobei  $r$  der Reflexionsfaktor der Impedanz  $W$  bezüglich der Referenzimpedanz  $Z$  ist.

Die zweite Definition bezieht sich nicht auf eine Übertragungsleitung. Der Zusammenhang zur ersten ist folgender: Auf einer Leitung, die am Anfang mit  $Z$  und am Ende mit  $W$  abgeschlossen ist, ist der Wert  $v$  nach Definition 2 auch der SWR-Wert nach Definition 1.

Ist  $W = b \cdot R$  mit  $b \geq 0$ , so gilt für den Reflexionsfaktor  $r$  von  $W$  bezüglich  $R$

$$r = \frac{W - R}{W + R} = \frac{b - 1}{b + 1}$$

Für  $b \geq 1$  ist  $|r| = \frac{b-1}{b+1}$  und für das Stehwellenverhältnis  $v$  ergibt sich

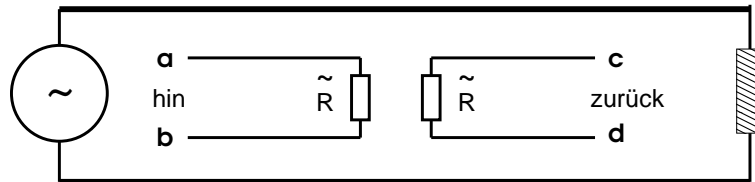
$$\begin{aligned} v &= \frac{1 + |r|}{1 - |r|} = \frac{1 + \frac{b-1}{b+1}}{1 - \frac{b-1}{b+1}} \\ &= \frac{b + 1 + (b - 1)}{b + 1 - (b - 1)} \\ &= b \end{aligned}$$

Für  $b < 1$  ist  $|r| = -\frac{b-1}{b+1}$  und es ergibt sich analog

$$v = \frac{1}{b}$$

## 7 SWR-Messung

### Richtkoppler



An jeder Stelle induziert der Strom in den Drähten der Hauptleitung ein Magnetfeld, das längs den benachbarten Drähten lokal eine Spannung und dadurch einen Strom induziert, dessen Richtung dem induzierenden Strom in den Hauptleitungen entgegengesetzt ist.

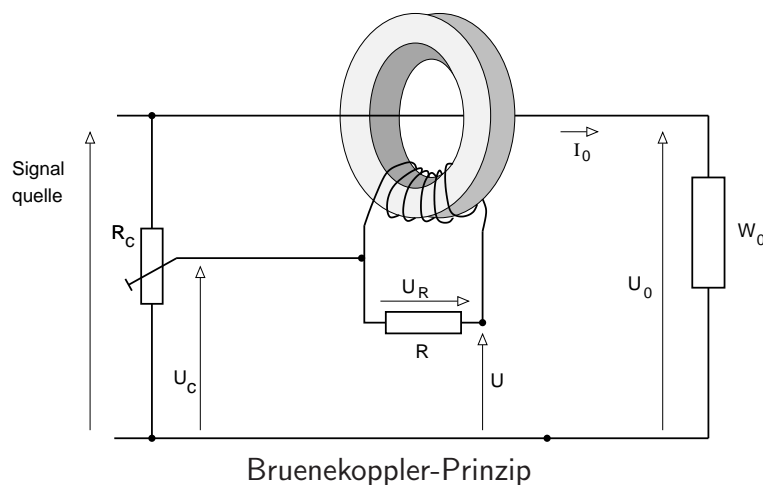
Die hinlaufende Welle in der Hauptleitung erzeugt in der Koppelleitung eine Welle, die vom Widerstand  $\tilde{R}$  zum offenen Ende läuft.

Die zurücklaufende Welle in der Hauptleitung (vom Verbraucher zur Quelle) erzeugt somit eine Welle in der Koppelleitung in entgegengesetzter Richtung, also in Richtung des Abschlusswiderstandes  $\tilde{R}$ . Dieser Widerstand wird so gewählt, dass diese Welle völlig absorbiert wird. Folglich ist die Amplitude der Spannung zwischen den Anschlüssen  $a$  und  $b$  proportional der Spannungsamplitude  $u_h$  der hinlaufenden Welle auf der Hauptleitung.

Analog schließt man, dass die Amplitude der Spannung zwischen  $c$  und  $d$  proportional der Spannungsamplitude  $u_r$  der zurücklaufenden Welle auf der Hauptleitung ist.

*Nachteil:* Die Ausgangsspannungswerte sind sehr frequenzabhängig.

### Bruene-Koppler



Wir betrachten im Folgenden stets nur die komplexen Amplituden der Spannungen und Ströme. Der Strom mit Amplitude  $I_0$  induziert im Ringkern ein Magnetfeld, das in der

Sekundärwicklung eine Spannung induziert, die proportional zu  $I_0$  ist. Es gibt also eine Konstante  $\kappa$ , so dass  $U_{sek} = \pm \kappa j \omega I_0$ . Das Vorzeichen ändert sich bei Vertauschen der Enden der Sekundärwicklung am Ringkern.

Der Strom durch den Widerstand  $R$  hat somit die Amplitude

$$I_R := \pm \frac{j\omega\kappa I_0}{R + j\omega L}$$

wobei  $L$  die Induktivität der Sekundärwicklung ist.

**Vereinfachende Annahme:** Die weitere Rechnung vereinfacht sich wesentlich, wenn man annimmt, dass  $\omega L$  viel größer ist als  $R$ , und man den Wert von  $R$  im Nenner einfach weglässt. Allerdings ergibt sich dadurch ein Fehler, der weiter unten betrachtet wird. Wir rechnen hier also mit folgendem Näherungswert für Wert  $I_R$  weiter.

$$I_R \approx \pm \frac{\kappa}{L} I_0$$

Wegen  $I_0 = \frac{U_0}{W_0}$  erhält man

$$U_R = \pm R I_R = \pm R \frac{\kappa}{L} I_0 = \pm U_0 \frac{\kappa}{L} \frac{R}{W_0}$$

Die Spannung  $U$  ist dann

$$U = U_c \pm U_0 \frac{\kappa}{L} \frac{R}{W_0}$$

Nun wird der Koppler kalibriert, indem man das Potentiometers auf  $U_c = U_0 \frac{\kappa}{L}$  einstellt, was geht, wenn man  $\frac{\kappa}{L} < 1$  voraussetzt. Die Amplitude der Ausgangsspannung  $U$  ist somit je nach Polarität der Ringkernsekunderwicklung

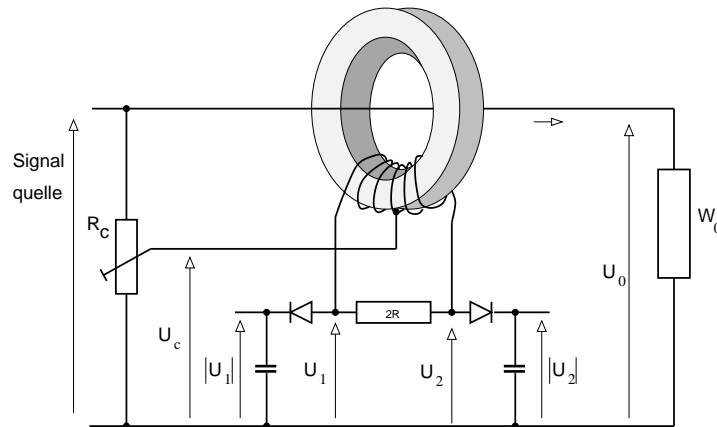
$$U_1 := U_0 \frac{\kappa}{L} \left(1 + \frac{R}{W_0}\right) \quad \text{oder} \quad U_2 := U_0 \frac{\kappa}{L} \left(1 - \frac{R}{W_0}\right)$$

## Fazit

1.  $U_2$  ist genau dann Null, wenn die Lastimpedanz  $W_0$  gleich  $R$  ist.
2. Wenn man den Koppler zweimal mit vertauschter Polarität der Ringkernsekundärwicklung aufbaut und somit sowohl  $U_1$  als auch  $U_2$  messen kann, so kann man daraus den Reflexionsfaktor von  $W_0$  in Bezug auf  $R$  ausrechnen.

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - \frac{R}{W_0}}{1 + \frac{R}{W_0}} = \frac{W_0 - R}{W_0 + R}$$

## Symmetrischer Bruenekoppler mit DC-Ausgängen



Symmetrischer Bruenekoppler mit DC-Ausgängen

Üblicherweise baut man einen Bruenekoppler symmetrisch auf und richtet die Ausgangsspannungen gleich, so dass man also die Beträge  $|U_1|$  und  $|U_2|$  der Amplituden misst.

### Fazit

Aus  $|U_1|$  und  $|U_2|$  kann man den Betrag  $|r|$  des Reflexionsfaktors  $r$  von  $W_0$  bezüglich  $R$  bestimmen. Die Ausgangsimpedanz  $W_0$  ist genau dann gleich  $R$ , wenn  $|U_2| = 0$ .

Ist  $W_0$  die Eingangsimpedanz einer Leitung mit Wellenwiderstand  $R$ , so ergibt sich daraus gemäß Abschnitt 6 das Stehwellenverhältnis auf der Leitung. Es ist 1, wenn  $|U_2| = 0$ .

**Vorsicht!** Wenn die Impedanz  $\omega L$  der Wicklung auf dem Ringkern in der Größenordnung von  $R$  liegt, ist die Bestimmung des Reflexionsfaktors und des Stehwellenverhältnisses aus  $|U_1|$  und  $|U_2|$  fehlerhaft.

### Genaue Rechnung und Fehlerbetrachtung

Es sei  $a := \frac{\omega L}{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 I_R &= \pm \frac{j\omega\kappa I_0}{R + j\omega L} \\
 &= \pm \frac{j\omega\kappa I_0}{\omega L(\frac{1}{a} + j)} \\
 &= \frac{\kappa}{L} I_0 \frac{j}{\frac{1}{a} + j} \\
 &= \frac{\kappa}{L} I_0 \frac{j a}{1 + ja} \\
 &= \frac{\kappa}{L} I_0 \frac{1}{1 + a^2} (a^2 + ja)
 \end{aligned}$$

Für die Spannungen  $U_1$  bzw.  $U_2$  ergibt sich analog zu der obigen approximativen Berechnung

$$\begin{aligned}
 U_{1|2} &= U_c \pm R I_R \\
 &= U_c \pm U_0 \frac{R}{W_0} \frac{\kappa}{L} (a^2 + ja) \quad \text{wegen } I_0 = \frac{U_0}{W_0} \\
 &= U_0 \frac{\kappa}{L} \left( 1 \pm \frac{R}{W_0} \frac{a^2}{1 + a^2} + j \frac{R}{W_0} \frac{a}{1 + a^2} \right) \quad \text{wegen } U_c = U_0 \frac{\kappa}{L}
 \end{aligned}$$

Für die Beträge gilt

$$|U_{1|2}| = |U_0| \frac{\kappa}{L} \sqrt{\left( 1 \pm \frac{R}{W_0} \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{R}{W_0} \frac{a}{1 + a^2} \right)^2}$$

Um die Abweichungen der vom Bruenekoppler gemessenen Werte zu bestimmen, setzen wir  $b := \frac{W_0}{R}$ . Für  $b \geq 1$  ist  $b$  das Stehwellenverhältnis, für  $b < 1$  ist  $\frac{1}{b}$  das Stehwellenverhältnis. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{|U_2|}{|U_1|} &= \sqrt{\frac{\left( 1 - \frac{1}{b} \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \frac{a}{1 + a^2} \right)^2}{\left( 1 + \frac{1}{b} \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \frac{a}{1 + a^2} \right)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left( b - \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{a}{1 + a^2} \right)^2}{\left( b + \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{a}{1 + a^2} \right)^2}}
 \end{aligned}$$

Dieser Wert ist der vom Bruenekoppler gemessene Wert  $|r|$  des Betrags des Reflexionsfaktors. Er entspricht dem Stehwellenverhältnis  $v = \frac{1+|r|}{1-|r|}$ . Man kann nun für verschiedene Werte von  $a = \frac{\omega L}{R}$  die Abweichung zum wahren Wert  $b$  berechnen.



In der linken Spalte stehen unterschiedliche Verhältnisse  $b = \frac{W_0}{R}$  der angeschlossenen Ausgangsimpedanz  $W_0$  zum internen Referenzwiderstand  $R$ . Die dazu gehörigen SWR-Werte stehen in der zweiten Spalte. Die anderen Einträge in der Tabelle sind die SWR-Werte, die der Bruenekoppler gemäß der Theorie in Abhängigkeit von dem Verhältnis  $a = \frac{\omega L}{R}$  der Impedanz der Sekundärwicklung am Ringkern zum Referenzwiderstand  $R$  misst.

b	true swr	a=1	a=2	a=3	a=5	a=10
1	1	2,6	1,6	1,4	1,2	1,1
2	2	4,2	2,6	2,3	2,1	2,0
0,5	2	2,6	2,16	2,1	2,0	2,0
3	3	6,2	3,8	3,4	3,1	3,0
0,33	3	3,4	3,1	3,0	3,0	3,0
5	5	10	6,3	5,8	5,2	5,0
0,2	5	5,2	5,0	5,0	5,0	5,0

Für  $a \geq 5$  dürfte die Genauigkeit für die meisten Amateurfunkanwendungen ausreichen. Man beachte aber, dass  $\omega L$  und damit  $a$  frequenzabhängig sind.

## 8 Quellenzitate

Die obige Darstellung lehnt sich an die folgenden Quellen an.

Erich Stadler: *Hochfrequenztechnik*. Vogel-Verlag 1973.

Gary Bold ZL1AN: *The Bruene Directional Coupler and Transmission Lines*. QST 2009.  
[www.arrl.org/tis/info/pdf/5904024.pdf](http://www.arrl.org/tis/info/pdf/5904024.pdf)