

# Eine kleine Einführung in digitale Signale und Korrelationsempfänger

Volker Aurich

DK3PK

# Inhalt

Analoge Signale

Diskretisierung analoger Signale

Quantisierung

Korrelationsaufgabe

Analoger Korrelationsempfänger

Diskreter Korrelationsempfänger

Fehlerbetrachtung

Reduzierung der Datenrate, Prozessgewinn

Selektion, Filterwirkung

Digitale Modulationsarten

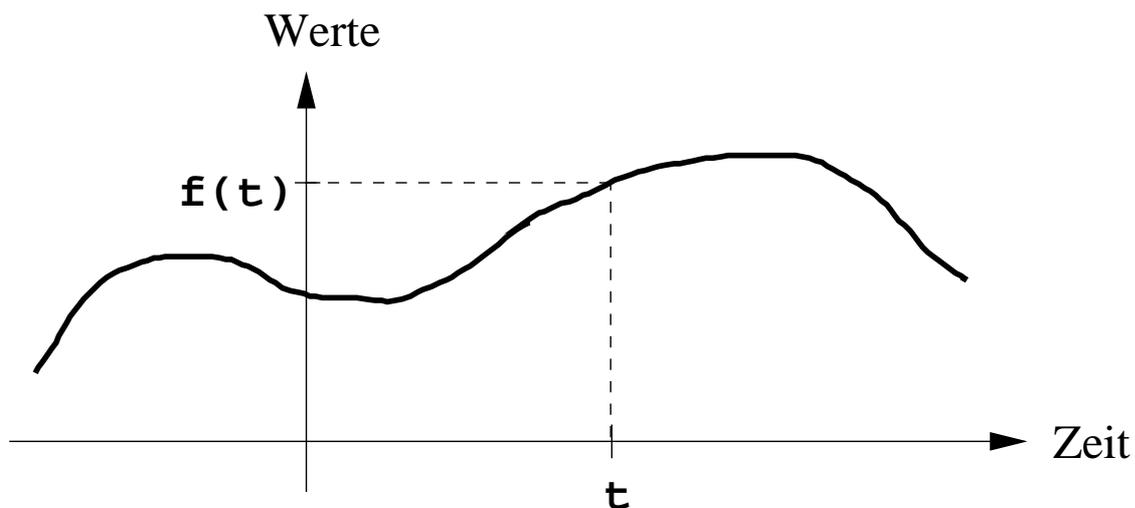
# 1 Analoge Signale

## Modellierung analoger Signale

Ein Signal, das reelle Werte hat, die von der Zeit abhängen, wird dargestellt als Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t)$$

Um damit vernünftig rechnen zu können, muss die Funktion gewisse mathematische Eigenschaften haben, die wir hier nicht näher erläutern.



## 2 Diskretisierung analoger Signale

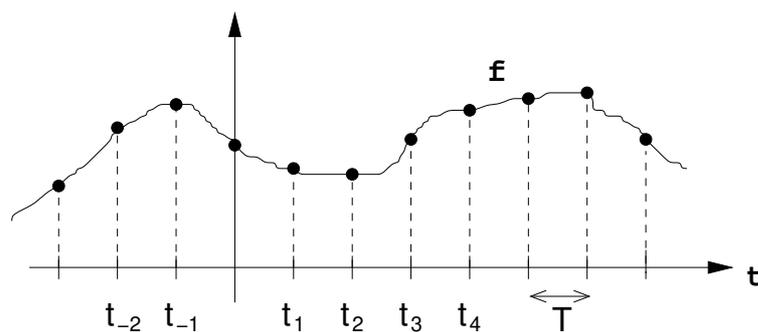
Die Diskretisierung eines analogen Signals besteht aus zwei Stufen:

- a) **Abtastung** = Zeitliche Diskretisierung
- b) **Quantisierung** = Diskretisierung der Werte

### Zeitliche Diskretisierung oder Abtastung

Wähle eine kleine Zeitspanne  $T > 0$  und definiere für jede ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$

$$t_n = n \cdot T$$



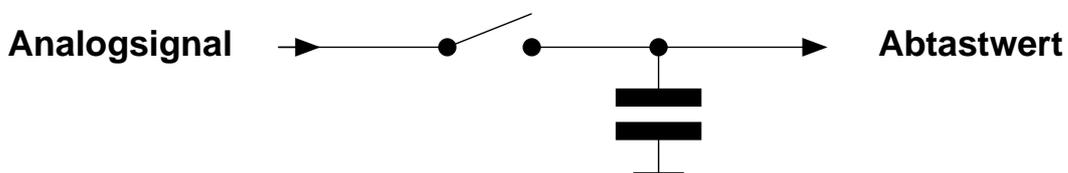
Die Folge der Werte  $\dots, f(t_2), f(t_1), f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$  bezeichnet man als das zeitlich diskrete Signal, das aus  $f$  durch Abtastung in den Zeitpunkten  $t_n$  entstanden ist.

Kurzform:  $(f(t_n))_{n \in \mathbb{Z}}$

## Fehlerquellen

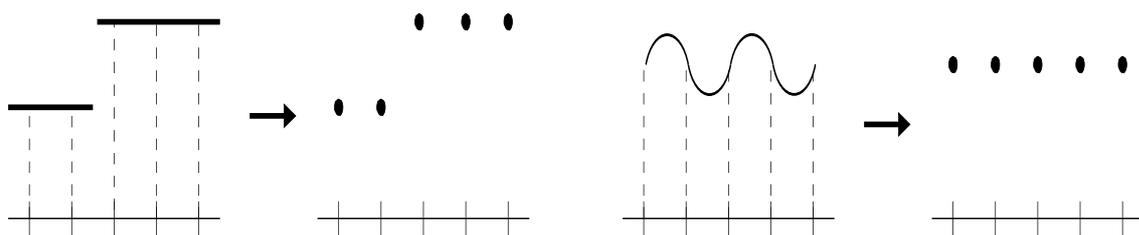
- a) Jitter: Die tatsächlichen Abtastzeitpunkte sind nicht exakt die  $t_n$ .
- b) Verschmierung: Die Abtastung erfolgt nicht genau in einem Zeitpunkt, sondern dauert eine kleine Zeitspanne.

### Prinzip eines Abtasters (Sample & Hold)



## Rekonstruktion des analogen Signals

**Achtung!** Man kann ein analoges Signal nicht immer aus Abtastwerten rekonstruieren!



Bedingungen, unter denen eine Rekonstruktion möglich ist, gibt das **Abtasttheorem** an.

## Abtasttheorem (Claude Shannon 1948 u. a.)

Eine exakte Formulierung des Abtasttheorems benötigt mathematische Begriffe, die über den Schulstoff hinausgehen. Und ein mathematisch exakter Beweis braucht sogar Begriffe und Methoden, die über ein Bachelorstudium in Mathematik hinausgehen.

### Grobe und ungenaue Formulierung:

*Ein Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch seine Abtastwerte  $f(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt, wenn es nur Anteile mit Frequenzen kleiner als die halbe Abtastfrequenz  $\frac{1}{2T}$  enthält (und einige weitere mathematische Eigenschaften hat). Man kann dann  $f$  durch eine explizite Interpolationsformel rekonstruieren.*

Die halbe Abtastfrequenz  $\frac{1}{2T}$  wird Nyquistfrequenz genannt (nach H. Nyquist) und die oben genannte Bedingung heißt Nyquistbedingung.

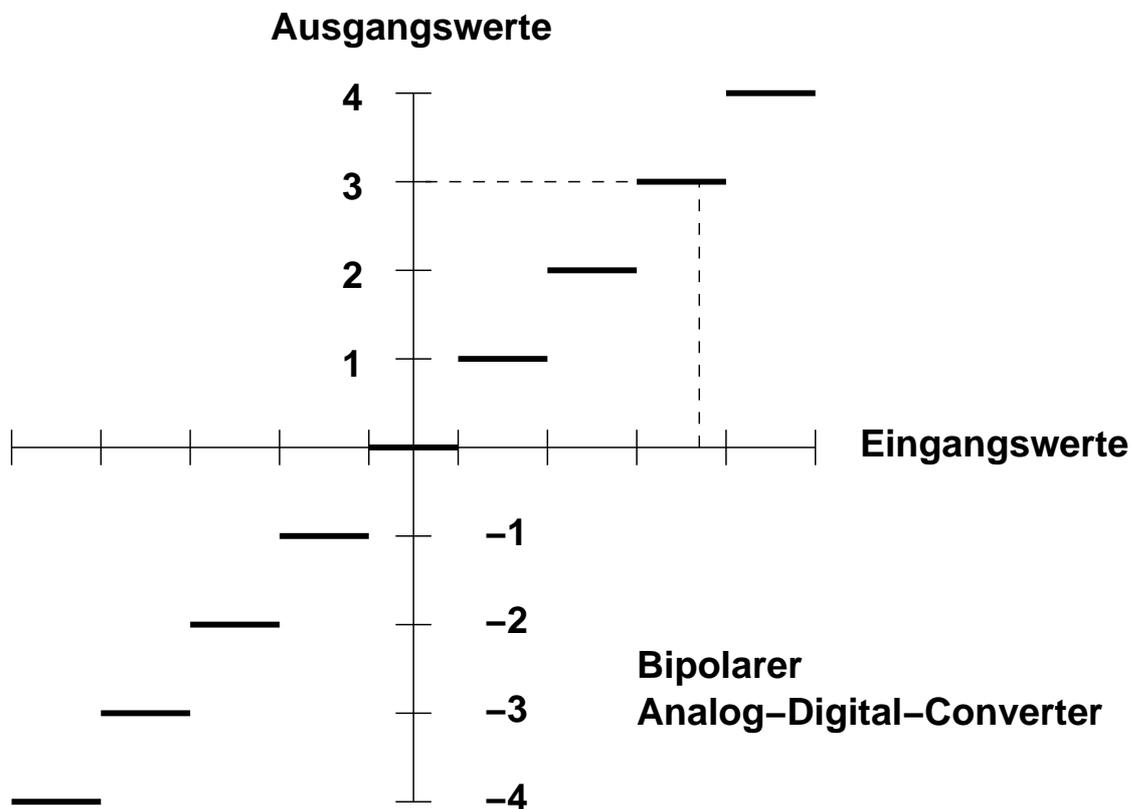
Man muss natürlich definieren, was unter *Anteilen* von  $f$  zu verstehen ist. Eine exakte Definition ist nur mit Hilfe der Fouriertransformation möglich. Für Funkamateure, die mit dem Begriff Bandbreite vertraut sind, kann man sagen: Ein Signal kann aus den Abtastwerten rekonstruiert werden, wenn seine Bandbreite kleiner als die Nyquistfrequenz ist.

**Achtung!** Die Formel zur Rekonstruktion von  $f$  enthält alle (unendlich viele) Abtastwerte  $f(t_n)$ . In der praktischen Anwendung kann man nur endlich viele berücksichtigen. Deshalb ist die Rekonstruktion im Allgemeinen nur approximativ möglich.

### 3 Quantisierung

Die Abtastwerte eines Signals sind reelle Werte. Ein Computer kann aber letztendlich nur ganze Zahlen verarbeiten.

Deswegen braucht man einen [Analog-Digital-Converter \(ADC\)](#). Der Eingangswertebereich wird in kleine, gleichlange Intervalle unterteilt. Allen Werten in einem Intervall wird die gleiche ganze Zahl zugeordnet.



Bei einem [bipolaren ADC](#) ist der Bereich der Eingangswerte symmetrisch zu 0, also von der Gestalt

$$[-U_{\max}, U_{\max}[ , \text{ wobei } U_{\max} > 0$$

Man spricht von einem  $n$ -Bit-ADC oder von einem ADC mit  $n$  Bit Auflösung, wenn der Bereich der Eingangswerte in  $N = 2^n$  Intervalle unterteilt wird. Der Bereich der Ausgangswerte eines bipolaren  $n$ -Bit-ADC ist dann die Menge  $\{-\frac{N}{2}, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ .

### Quantisierungsfehler

Weil ein ADC (unendlich) viele Eingangswerte auf denselben Ausgangswert abbildet, entstehen durch Quantisierung zwangsläufig Fehler, d.h. Abweichungen von den ursprünglichen Abtastwerten.

Sie sind nicht vermeidbar! Man kann sie aber durch Erhöhung der ADC-Auflösung verkleinern.

Um die Auswirkungen dieser Quantisierungsfehler abschätzen zu können, modelliert man sie mathematisch als weißes Rauschen. Das ist zwar nicht wirklich richtig, ermöglicht aber eine mathematische Analyse. Das Ergebnis ist die bekannte Näherungsformel für das Signal-Rausch-Verhältnis eines  $n$ -Bit-ADC (= Quotient aus mittlerer Leistung eines Sinus bei Vollaussteuerung und mittlerer Leistung des Quantisierungsrauschens)

$$SNR_{nBitADC} = 6,02 \cdot n + 1,76 \quad \text{dB}$$

## 4 Korrelation

**Aufgabe:** Bestimme in einem Signal zu einem Zeitpunkt  $t$  die Amplitude und Phase des Anteils mit Frequenz  $\omega$ .

**Was soll das bedeuten?** Eine genaue Definition der Begriffe ist nur möglich mit Hilfe der Fouriertransformation. Hier wählen wir einen direkten Zugang.

Wir wollen messen, wie gut das Signal  $f$  in einem Intervall  $[t - T, t]$  mit einer Sinus- oder Cosinusschwingung der Frequenz  $\omega$  übereinstimmt.

Dafür wählen wir  $L = \frac{1}{\omega}$  (Periodendauer) und berechnen die Korrelationen

$$I(t) = \frac{2}{L} \int_{t-L}^t f(s) \cos 2\pi\omega s \, ds \quad Q(t) = \frac{2}{L} \int_{t-L}^t f(s) \sin 2\pi\omega s \, ds$$

$I(t)$  nennt man den **Inphase-Anteil** und  $Q(t)$  den **Quadratur-Anteil**.

Sprechweise: Das Signal  $f$  hat zum Zeitpunkt  $t$  einen Anteil der Frequenz  $\omega$  mit

**Amplitude**  $A(t) = \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2}$  und **Phase**  $\varphi = \arctan \frac{Q(t)}{I(t)}$

Bis auf den Faktor 2 sind  $I(t)$  und  $Q(t)$  Mittelwerte über das Intervall  $[t - L, t]$ .

**Beispiel**

Das Signal  $f$  habe die Gestalt

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t - \varphi)$$

mit Amplitude  $a > 0$  und Phasenverschiebung  $\varphi$ .

Dann gilt zu jedem Zeitpunkt  $t$

$$f(t) = a \cos \varphi \cdot \cos(2\pi\omega t) + a \sin \varphi \cdot \sin(2\pi\omega t)$$

und

$$a = \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{Q(t)}{I(t)}$$

Umgekehrt kann man jede Linearkombination

$$f(t) = \alpha \cos(2\pi\omega t) + \beta \cdot \sin(2\pi\omega t)$$

in folgender Gestalt schreiben

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t - \varphi)$$

wobei  $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  und  $\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ .

*Beweis:*

Es gilt

$$\int_{t-L}^t \cos^2(2\pi\omega s) ds = \int_{t-L}^t \sin^2(2\pi\omega s) ds = \frac{L}{2}$$

und

$$\int_{t-L}^t \cos(2\pi\omega t) \cdot \sin(2\pi\omega t) dt = 0$$

Mit dem Additionstheorem

$$f(t) = a \cos \varphi \cdot \cos(2\pi\omega t) - a \sin(-\varphi) \cdot \sin(2\pi\omega t)$$

folgt

$$I(t) = a \cos \varphi \frac{2}{L} \int_{t-L}^t \cos^2 2\pi\omega s ds = a \cos \varphi$$

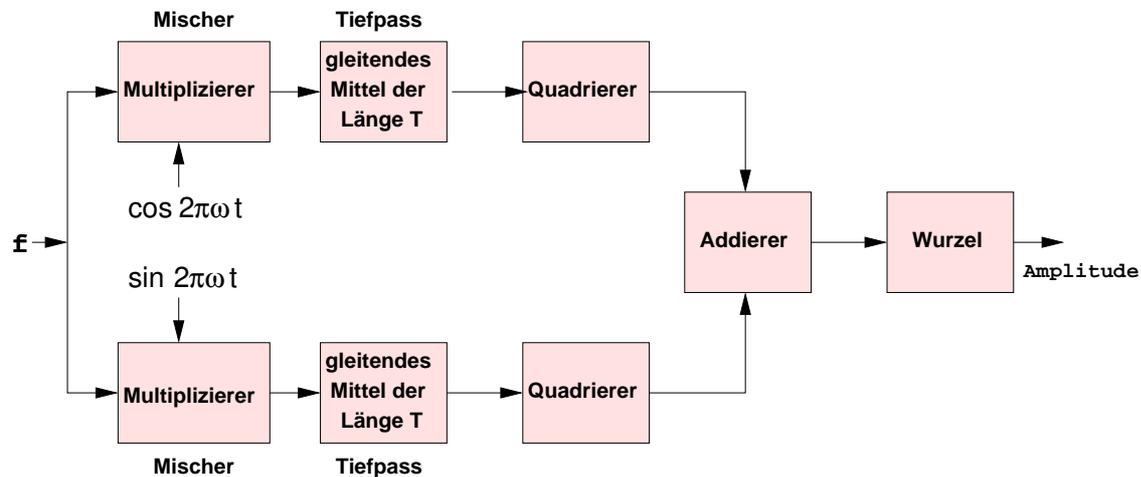
$$Q(t) = a \sin \varphi \frac{2}{L} \int_{t-L}^t \sin^2 2\pi\omega s ds = a \sin \varphi$$

$$(I(t))^2 + (Q(t))^2 = a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = a^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2$$

und

$$\frac{Q(t)}{I(t)} = \tan \varphi$$

## 5 Analoger Korrelationsempfänger



### Beachte:

Ein Multiplizierer ist nichts anderes als ein idealer Mischer!

Eine gleitende Mittelwertbildung ist ein spezieller Tiefpass.

## 6 Diskreter Korrelationsempfänger

Wähle die gleiche Empfängerstruktur wie im analogen Fall und ersetze die Integrale durch Summen über die Abtastzeitpunkte in einem Intervall von Periodenlänge.

Wir setzen voraus, dass  $L = \frac{1}{\omega}$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $T$  ist, es also eine ganze Zahl  $M$  mit  $L = M \cdot T$  gibt. Statt  $I(t)$  bzw.  $Q(t)$  definiert man für jeden Abtastzeitpunkt  $t_k = k \cdot T$

$$\begin{aligned}
I_d(t_k) &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(t_{k-m}) \cos 2\pi\omega t_{k-m} \\
&= \frac{2}{M} \left( (f(t_k) \cos 2\pi\omega t_k) + (f(t_{k-1}) \cos 2\pi\omega t_{k-1}) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (f(t_{k-M-1}) \cos 2\pi\omega t_{k-M-1}) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Q_d(t_k) &= \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(t_{k-m}) \sin 2\pi\omega t_{k-m} \\
&= \frac{2}{M} \left( (f(t_k) \sin 2\pi\omega t_k) + (f(t_{k-1}) \sin 2\pi\omega t_{k-1}) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (f(t_{k-M-1}) \sin 2\pi\omega t_{k-M-1}) \right)
\end{aligned}$$

$I_d(t_k)$  bzw.  $Q_d(t_k)$  heißen der **Inphase-Anteil** bzw. **Quadratur-Anteil** und

$$A_d(t_k) = \sqrt{I_d(t_k)^2 + Q_d(t_k)^2}$$

die **Amplitude** und

$$\varphi_d(t_k) = \arctan \frac{Q_d(t_k)}{I_d(t_k)}$$

die **Phase** des Anteils des Signals mit Frequenz  $\omega$  zum Zeitpunkt  $t_k$ .

## Fehlerquellen

**Fehler des ADC:** Ungleiche Treppenstufen, Offset, Monotoniefehler, Jitter bei der Abtastung

Diese Fehler hängen von dem verwendeten ADC ab und sind nicht beeinflussbar, außer der Jitter eines externen Taktsignals.

**Quantisierungsfehler** Die eigentlichen Quantisierungsfehler sind nicht direkt beeinflussbar. Es gibt aber Methoden, ihre Auswirkungen zu reduzieren.

## Mittelung, Prozessgewinn

Durch die gleitende Mittelwertbildung werden auch die Quantisierungsfehler gemittelt. Betrachtet man die Fehler in den Zeitpunkten  $t_k$  als Realisierungen von stochastisch unabhängig Zufallsvariablen (weißes Rauschen), so folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen, dass die Varianz des Mittelwerts der Fehler nur ein  $M$ -tel der Varianz der einzelnen Zufallsvariablen ist.

*Andere Betrachtungsweise:*

Die gleitende Mittelwertbildung hat eine Tiefpasswirkung, die die Bandweite des Quantisierungsrauschens und somit die mittlere Rauschleistung reduziert.

## Dithering

Zufällige Verschiebungen der Stufengrenzen bewirken eine gleichmäßigere Verteilung der Quantisierungsfehler und ein geringeres Quantisierungsrauschen.

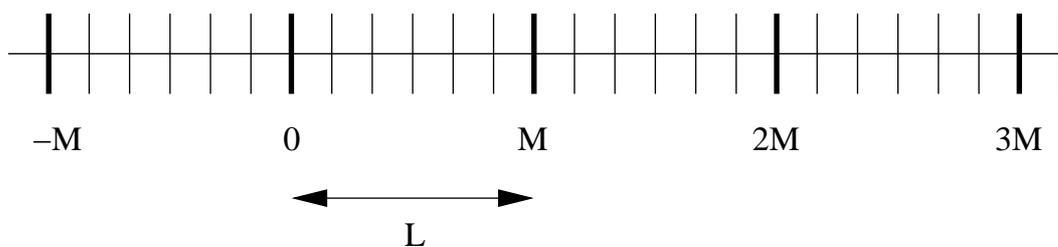
## Dezimierung der Datenrate

Hat das Signal  $f$  die Gestalt

$$f(t) = a \cos(2\pi t - \varphi) ,$$

so hat  $A_d(kT)$  für alle  $k$  den gleichen Wert, und die Werte von  $I_d, Q_d$  bzw.  $\varphi_d$  sind in jedem  $M$ -ten Zeitpunkt  $j \cdot M \cdot T$  dieselben.

Deshalb betrachtet man diese Größen nur noch in den Zeitpunkten  $j \cdot M \cdot T$ .

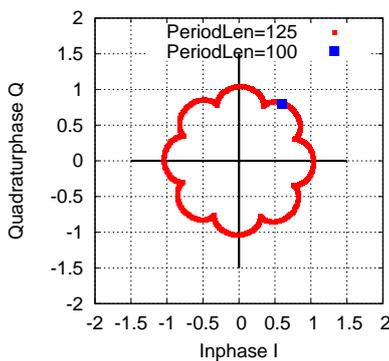


Dadurch wird die benötigte Rechenleistung in der weiteren Verarbeitung deutlich reduziert.

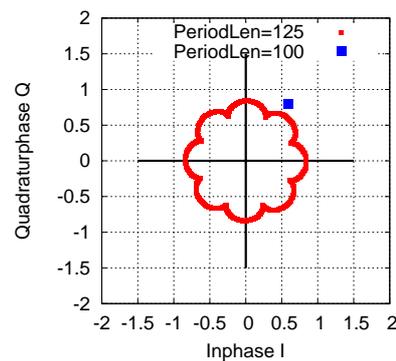
## Selektion und Filterwirkung

Die folgenden Diagramme zeigen die Filterwirkung diskreter Korrelationsempfänger, welche die Korrelation mit der komplexen harmonischen Schwingung  $\cos(2\pi k)/100 + i \sin(2\pi k)/100$  über eine unterschiedliche Anzahl von Perioden (der Länge 100) berechnen. Es wurden zwei diskrete Sinussignale  $S_1$  und  $S_2$  erzeugt;  $S_1$  hat Periodenlänge 100,  $S_2$  hat Periodenlänge 125.

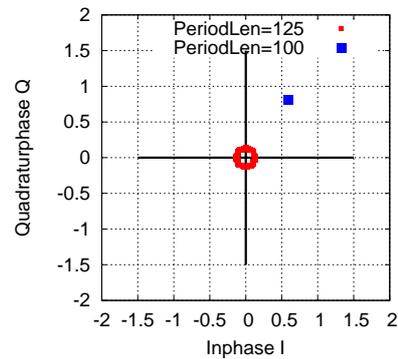
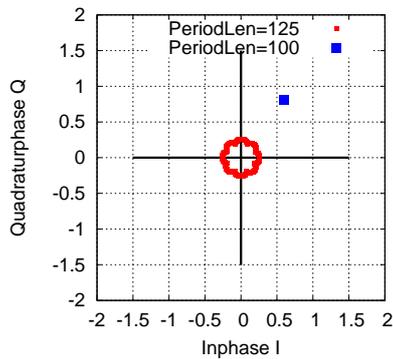
Zu jedem Zeitpunkt geben die beiden Empfängertiefpässe zwei Werte aus, die als Koordinaten von Punkten in der Ebene aufgefasst werden. In den Diagrammen 1 bis 4 sind diese Punkte für die Zeiten 0 bis 16000 eingetragen und zwar in blau diejenigen für das Eingangssignal  $S_1$  und in rot diejenigen für das Eingangssignal  $S_2$ . Die Ausgangswerte für  $S_1$  sind konstant und ergeben den blauen Punkt, der wegen einer Phasenverschiebung von  $S_1$  nicht auf einer Koordinatenachse liegt. Die Werte für das Signal mit Periodenlänge 125 mäandern mit wachsender Länge des Korrelationszeitintervalls immer enger um den Nullpunkt



D1: Filterlänge=1 Periode

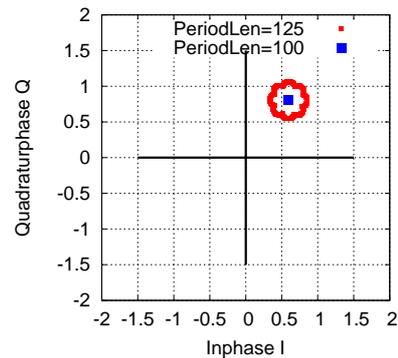
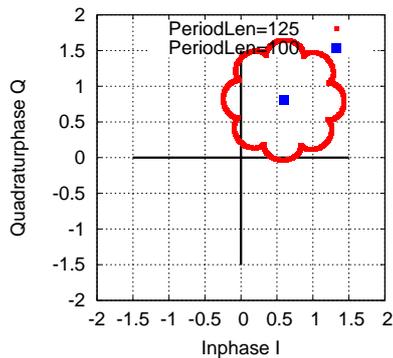


D2: Filterlänge=2 Perioden

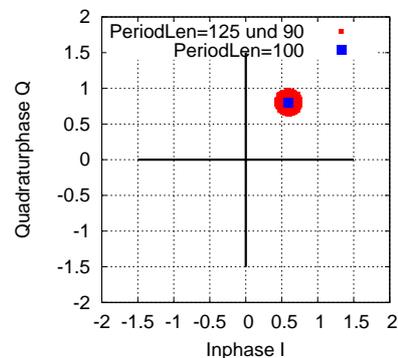
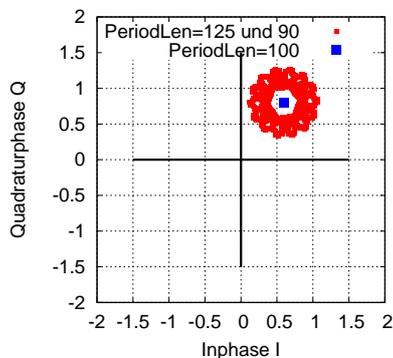


D3: Filterlänge=4 Perioden      D4: Filterlänge=12 Perioden

In den Diagrammen 5 bis 6 wurde für  $S_2$  die Summe von drei Sinussignalen mit den Periodenlängen 100, 80 und 125 gewählt. Deshalb mäandert die Ausgangswerte für  $S_2$  nicht um den Nullpunkt, sondern um den (blauen) Ausgangswert für  $S_1$ .



D5: Filterlänge= 2 Periode      D6: Filterlänge= 4 Perioden



D7: Filterlänge= 4 Perioden      D8: Filterlänge= 8 Perioden

## 7 Digitale Modulationsarten

$Z$  sei eine endliche Menge von  $M$  Zeichen (Symbolen), z.B. die Menge der Buchstaben oder die einfach nur die Menge  $\{0, 1\}$ .

Eine **Nachricht** ist eine Folge  $s_0, s_1, s_2, \dots$  von Zeichen aus  $S$ .

### Modulation

Um eine Nachricht zu übertragen, ordnet man jedem Zeichen  $z$  aus  $Z$  ein spezielles Signal  $g_z$  von kurzer Dauer  $L$  zu und sendet dann die der Nachricht entsprechende Folge  $g_{s_0}, g_{s_1}, \dots$  von diesen Signalen. Verschiedene Zeichen  $z$  sollen stets unterschiedliche Signale  $g_z$  zugeordnet bekommen, damit der Empfänger wieder die ursprüngliche Nachricht generieren kann.

### Demodulation

Bei der Übertragung der Signale können Fehler auftreten. Dann unterscheidet sich das zum Zeitpunkt  $j$  empfangene Signal  $h$  von dem gesendeten Signal  $g_{s_j}$ . Man wählt dann als empfangenes Symbol dasjenige Zeichen  $z$ , für das  $g_z$  am ähnlichsten zu  $h$  ist.

Für die praktische Anwendung sind etliche Begriffe erst einmal präzise zu definieren, z.B.

- Welche Arten von Signalen  $g_z$  sind dafür geeignet? Und welche Signaleigenschaften kann man zur Unterscheidung verwenden?
- Was soll ähnlich bedeuten?

## Frequenzumtastung FSK

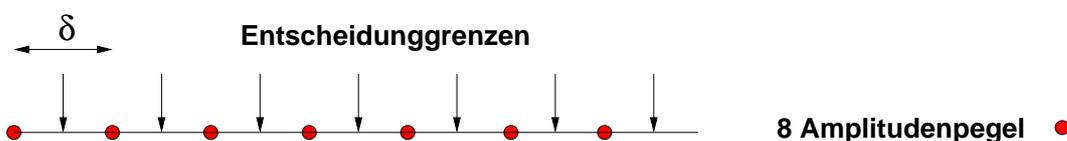
Jedem Zeichen  $z$  wird eine Sinus-schwingung  $g_z$  von vorgegebener Zeitdauer  $L$  und vorgegebener Frequenz  $\omega_z$  so zugeordnet, dass unterschiedliche Zeichen stets unterschiedliche Frequenzen zugeordnet bekommen.

Zur Demodulation kann man im Prinzip entsprechend viele Korrelationsempfänger für die unterschiedlichen Frequenzen  $\omega_z$  verwenden. Als demoduliertes Zeichen wählt man das  $z$ , für das der Korrelationsempfänger mit Frequenz  $\omega_z$  den größten Amplitudenwert liefert.

Man kann natürlich auch Kombinationen von mehreren Frequenzen gleichzeitig aussenden.

## Amplitudenumtastung

Verwende eine Sinusschwingung fester Frequenz  $\omega$  und ordne jedem Zeichen  $z$  eine andere Amplitude  $\alpha_z$  zu, also das Signal  $g_z(t) = \alpha_z \cos(2\pi\omega t)$ .



Zur **Demodulation** misst man die Amplitude  $a$  des empfangenen Signals und wählt das Zeichen  $z$  aus, für das die Amplitude  $\alpha_z$  von  $g_z$  am nächsten bei  $a$  liegt.

Probleme:

- Störungen dürfen nur halb so groß wie der Mindestabstand  $\delta$  zweier benachbarter Amplitudenpegel sein, damit der Demodulator das korrekte Zeichen ausgibt.
- Eine Vergrößerung der Abstände bedeutet insgesamt höhere Amplitudenwerte, also eine höhere, benötigte Leistung!
- Bei vorübergehenden Abschwächungen des Signals (QSB) kann man nicht absolute Amplitudenpegel verwenden.

Fazit: Bei vorgegebener maximaler Leistung kann der Störabstand nicht beliebig verbessert werden.

Ausweg: Mehr Signalparameter zur Unterscheidung verwenden!

## Quadratur-Amplituden-Modulation (QAM)

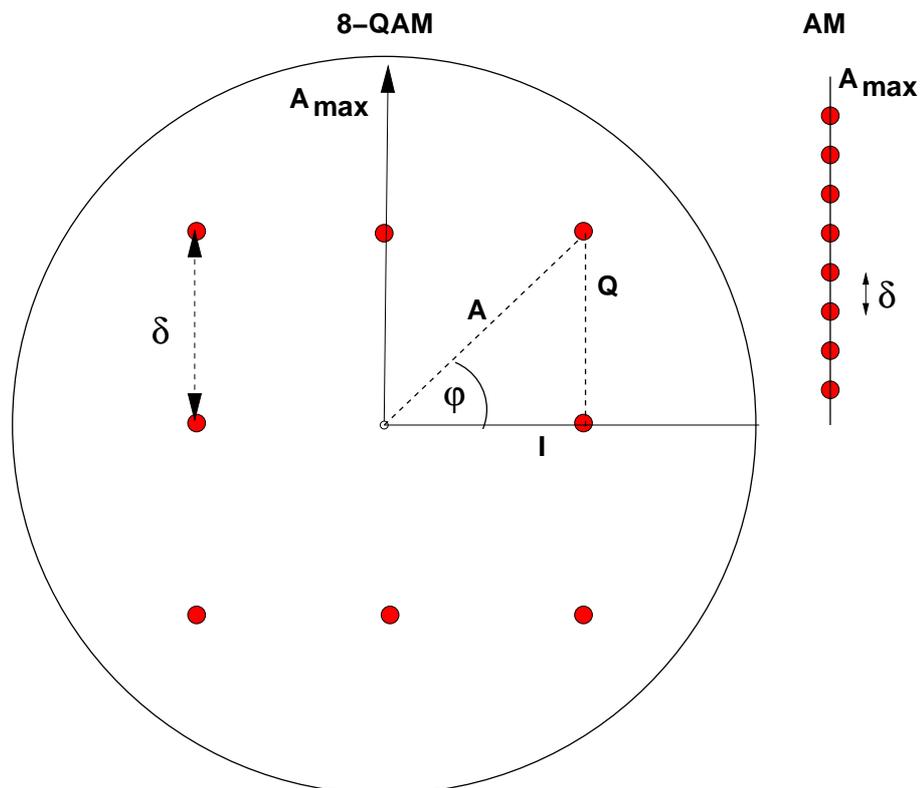
**Idee:** Verwende Sinuschwingungen mit einer vorgegebenen Frequenz  $\omega$  und unterschiedlichen Amplituden  $a_z$  und Phasen  $\varphi_z$ .

Jedem Punkt  $p$  in der Ebene mit den Polarkoordinaten  $(a, \varphi)$  entspricht das Signal  $a \cos(2\pi\omega t - \varphi)$  und umgekehrt. Den Signalen, deren Amplitude höchstens  $A_{\max}$  ist, entsprechen die Punkte in der Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $A_{\max}$ .

**Modulation:** Ordne jedem Zeichen  $z$  aus  $Z$  einen Punkt  $p_z$  in der Ebene zu, derart dass für unterschiedliche Zeichen  $z_1$  und  $z_2$  stets  $p_{z_1} \neq p_{z_2}$  gilt. Bei der Modulation wird dann für eine Zeichen  $z$  das Signal  $a_z \cos(2\pi\omega t - \varphi_z)$  gesendet, wobei  $(a_z, \varphi_z)$  die Polarkoordinaten von  $p_z$  sind.

## Vorteil von QAM:

In einer Kreisscheibe mit Radius  $A_{\max}$  kann man  $M$  Punkte so verteilen, dass ihr gegenseitiger Abstand größer ist, als wenn man sie in dem Intervall  $[0, A_{\max}]$  platziert.



## Demodulation

Wird ein Signal  $h$  empfangen, so wird durch Korrelation mit  $\cos(2\pi\omega t)$  und  $\sin(2\pi\omega t)$  sein Inphaseanteil  $I$  und Quadraturanteil  $Q$  mit Frequenz  $\omega$  und somit seine Amplitude  $A$  und Phase  $\varphi$  gemessen. Dann wird dasjenige Zeichen  $w$  ausgegeben, dessen Punkt  $p_w$  den kleinsten (euklidischen) Abstand zu dem Punkt  $(I, Q)$  hat.

Wie wirken sich Störungen bei der Übertragung aus?

$\delta$  sei der Mindestabstand der Punkte  $p_z$  mit  $z \in Z$ .

Das ausgegebene Zeichen  $w$  ist korrekt d.h. gleich dem gesendeten Zeichen  $z$ , wenn die durch die Störung verursachte Abweichung des Punktes  $(I, Q)$  von  $p_z$  kleiner als  $\delta$  ist.

Weil bei gleicher Leistungsbeschränkung der Mindestabstand bei QAM größer als bei AM gewählt werden kann, ist die Störfestigkeit höher.

## Modulation mit orthogonalen Signalen

Beobachtung: In einer dreidimensionalen Kugel mit Radius  $A_{\max}$  kann man  $M$  Punkte so verteilen, dass ihr gegenseitiger Abstand größer ist als der von  $M$  Punkten in einer Kreisscheibe mit Radius  $A_{\max}$ .

Fazit: Gehe in höherdimensionale Räume! Wie macht man das?

Noch mal QAM in etwas anderer Sicht:

Setze  $f_1(t) = \cos(2\pi\omega t)$  and  $f_2(t) = \sin(2\pi\omega t)$ . Dann haben die bei QAM verwendeten Signale die Gestalt

$$f(t) = \alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t) \text{ mit reellen Zahlen } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 \text{ und } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq A_{\max}^2$$

Wie schon weiter oben gezeigt wurde, kann man die Parameter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus  $f$  berechnen, nämlich

$$\alpha_1 = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) f_1(s) ds \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) f_2(s) ds$$

Der wesentliche Grund, warum dies geht, ist die Eigenschaft

$$\int_0^L f_1(s) f_2(s) ds = 0$$

Man sagt, die beiden Signale seien *orthogonal* zueinander.

Diese Darstellung von QAM kann man ins Höherdimensionale übertragen.

**Ansatz:**

Wähle Signale  $f_1, \dots, f_n$ , die auf einem Zeitintervall  $[0, L]$  definiert sind und paarweise orthogonal und normiert sind d.h., dass gilt

$$\int_0^L f_j(s) f_k(s) ds = 0 \text{ für } j \neq k$$

und

$$\frac{1}{L} \int_0^L f_j(s)^2 ds = 1 \text{ für alle } j$$

Jedem  $n$ -Tupel  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  reeller Zahlen ordnet man das Überlagerungssignal

$$f_a = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

zu. Für jedes  $j$  gilt

$$\alpha_j = \int_0^L f_a(s) \cdot f_j(s) ds$$

und die mittlere Leistung des Signals  $f_a$  ist proportional zu

$$P = \int_0^L f_a(s)^2 ds = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

Wie bei QAM wählt man nun  $M$  Punkte  $a_1, \dots, a_n$  in der  $n$ -dimensionalen Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $\sqrt{P}$  derart, dass der Mindestabstand zwischen ihnen möglichst groß ist.

Je höher die Dimension  $n$  ist, desto mehr „Platz“ ist in dieser Kugel und desto größer kann der Mindestabstand gewählt werden.