# Die sprungerhaltende Glättung verrauschter, harmonischer Schwingungen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Eva Mühlhaus
aus Düsseldorf

Düsseldorf
1997

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. V. Aurich
2. Referent: Prof. Dr. E. Speckenmeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 29.1.1998

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Die Signalverarbeitung beschäftigt sich mit Verfahren zur Veränderung von Signalen. Insbesondere sollen durch eine Elimination oder Reduktion von Störungen wichtige Strukturen in einem Signal deutlicher hervorgehoben werden.

In der Praxis ist ein Signal oft eine physikalische Größe, die in Abhängigkeit von anderen Parametern, zum Beispiel der Zeit, gemessen wird und deren Werte reelle oder komplexe Zahlen sind. Hängt das Signal von $n$ Parametern ab, spricht man von einem $n$–dimensionalen Signal und modelliert es als Abbildung $f\colon D \to W$, deren Definitionsbereich $D$ eine Teilmenge eines $n$–dimensionalen Raumes ist und deren Wertebereich meist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.
Im allgemeinen werden die Originaldaten durch den Meßvorgang verfälscht und das Meßergebnis ist ein verrauschtes Signal. Liegen Meßwerte von $f$ nur in diskreten Punkten vor, wie es zum Beispiel bei Bildern von üblichen Videokameras der Fall ist, so spricht man von einem diskreten Signal.

In dieser Arbeit werden Beispiele für diskrete, $n$–dimensionale Signale und ihre Verarbeitung vorgestellt: Sinusförmige und lokal konstante Signale ($n = 1$), Grauwertbilder ($n = 2$, siehe S. 58) und Grauwertbildfolgen ($n = 3$, siehe S. 59).

### Die Aufgabenstellung der sprungerhaltenden Glättung

Wir gehen davon aus, daß die Störungen im Signal aus *kleinen*, *schnellen* Änderungen der Werte bestehen. Die wesentlichen Strukturen sind *größer* und *gröber*. Die Wertänderungen am Rand dieser Strukturen nennen wir Sprünge.

Ein verrauschtes Signal $\tilde{f}\colon D \to W$ betrachten wir als fehlerhafte Messung eines unverrauschten Originalsignals $f$. Es ist die Summe eines idealen, gröber strukturierten Signals $f$ und einem Störsignal, das kleine, zufällige Werte annimmt. Das Störsignal wird als Realisierung von Zufallsvariablen $x_t$ für $t \in D$ mit Erwartungswert 0 modelliert. Wünschenswert wäre es, die Störungen vollständig zu beseitigen, was auf eine exakte Rekonstruktion von $f$ hinausläuft. Aufgrund des stochastischen Charakters der Aufgabenstellung ist eine Rekonstruktion des Originalsignals $f$ nicht

möglich. Daher verfolgen wir das Ziel, das Signal durch Glätten möglichst gut von den Störungen zu befreien. Das Verschmieren von Sprüngen muß dabei verhindert werden.
Wir unterscheiden im folgenden die beiden Fälle, daß nur eine einzige oder sehr viele Messungen desselben Signals $f$ vorliegen. Liegen sehr viele Messungen $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ eines Signales vor, so erhalten wir durch den Mittelwert

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(t_0)$$

eine Näherung für den Wert an der Stelle $t_0$, die nach dem starken Gesetz der großen Zahlen um so besser ist, je größer $n$ ist. Oft – und das ist der in dieser Arbeit schwerpunktmäßig betrachtete Fall – liegt jedoch nur eine einzige Messung $\tilde{f}$ eines Signals vor. Wir behelfen uns, indem wir einen Mittelwert über eine Umgebung $U(t_0)$ von $t_0$ in $D$ bilden und die Werte der einzigen vorliegenden Realisierung $\tilde{f}$ mitteln. Ist das unverrauschte Originalsignal $f$ konstant und sind die Störvariablen unabhängig, so ist ebenfalls nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{|U(t_0)|} \sum_{t \in U(t_0)} \tilde{f}(t)$$

eine Approximation von $f(t_0)$. Das oben angerissene Problem der Verschmierung von Sprüngen wird hier deutlich: Durch eine lokale Mittelwertbildung kann man zwar feine Fluktuation glätten, gleichzeitig verschmiert man aber auch die Sprünge. Deshalb muß man nichtlineare Verfahren einsetzen, die kleinere und größere Wertänderungen im Signal unterschiedlich behandeln.

Es gibt mehrere Verfahren, die versuchen, der Aufgabenstellung der sprungerhaltenden Glättung gerecht zu werden, unter anderem den Ansatz mit anisotroper Diffusion ([PM90]) sowie sogenannte modellbasierte Verfahren. Darunter fallen der Versuch, den Graphen des Signals durch eine Membran zu approximieren, die an Stellen größter Spannung reißen kann ([BZ87]), sowie eine Modellierung mit Markovfeldern ([GG]). Eine weitere Möglichkeit besteht darin, lineare Verfahren zu modifizieren, so daß zwar der Glättungseffekt erhalten bleibt, jedoch Sprünge nicht verschmiert werden.

### Das nichtlineare Gaußfilter

In [Weu94, AuWeu96] wird das lineare Gaußfilter für Grauwertbilder ($n = 2$) zu einem nichtlinearen Gaußfilter weiterentwickelt. Das lineare Gaußfilter mit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ berechnet an jeder Stelle $t_0 \in D$ eine gaußgewichtete Mittelung des Eingangssignals $\tilde{f}$. Je weiter man im Ort von der Stelle $t_0$ entfernt ist, um so weniger geht

$\tilde{f}(t)$ in die Mittelung ein. Dabei ist $U(t_0)$ eine Umgebung von $t_0$ in $D$ und $N_{t_0}$ ein Normierungsfaktor, der die Summe der Gaußgewichte auf 1 normiert.

$$\text{Linear} \qquad t_0 \;\mapsto\; \frac{1}{N_{t_0}} \sum_{t \in U(t_0)} \tilde{f}(t)\; \exp\left(-\frac{|t-t_0|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Durch das zusätzliche Einführen einer Fensterfunktion in Werterichtung trifft man beim nichtlinearen Gaußfilter eine Entscheidung, ob ein Sprung oder lediglich eine durch Rauschen verursachte Störung vorliegt.

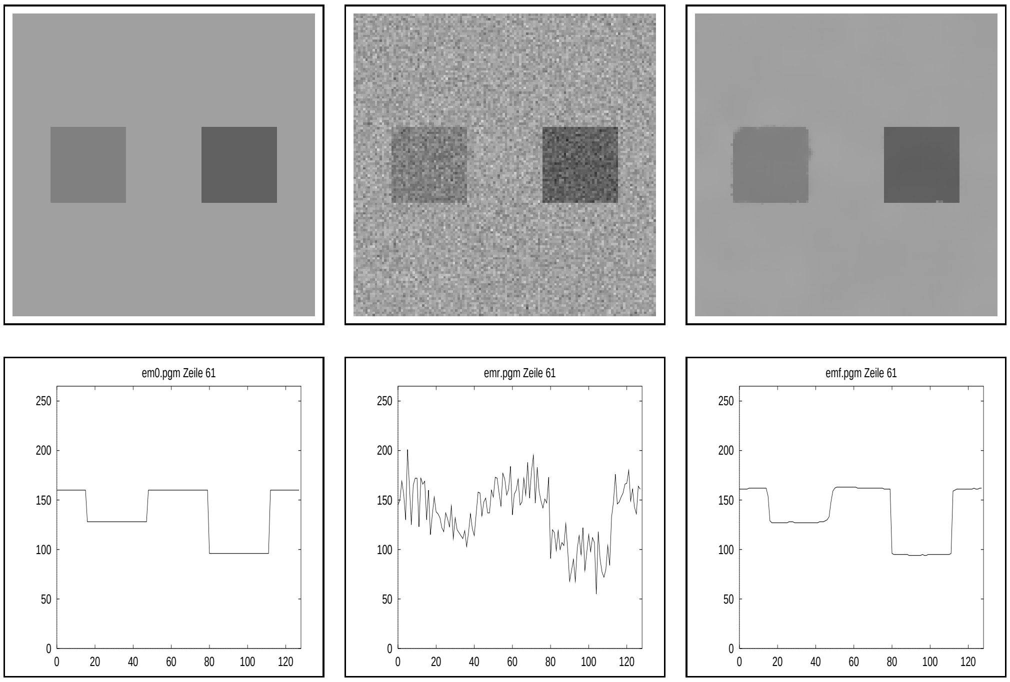
$$\text{Nichtlinear} \quad t_0 \;\mapsto\; \frac{1}{N'_{t_0}} \sum_{t \in U(t_0)} \tilde{f}(t)\; \exp\left(-\frac{|t-t_0|^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{|\tilde{f}(t)-\tilde{f}(t_0)|^2}{2\zeta^2}\right)$$

Analog zum linearen Filter normiert $N'_{t_0}$ die Summe der Gaußgewichte auf 1. Durch die Gewichtung der Abweichungen mit Gaußglocken erzwingt man eine *weiche* Entscheidung, welche Funktionswerte in die Mittelung eingehen. Wir erhalten ein nichtlineares, robustes, sprungerhaltendes Glättungsverfahren, das Feinstukturen mit einer Größe (im Ort) $< \sigma$ und einer Höhe (in Werterichtung) $< \zeta$ reduziert.

Eine vollständige Entfernung der Störungen ist nicht immer in einem Filterschritt möglich. Erst durch Iteration, also durch eine Filterkette, mit richtig abgestimmten Parametern erhält man ein starkes Werkzeug zur kantenerhaltenden Glättung. Die nichtlineare Gaußfilterkette für Bilder eignet sich als Vorverarbeitungsschritt, an den sich weitere Bildverarbeitungsschritte wie Merkmalsextraktion oder Datenkomprimierung (wie bei [Dau95]) anschließen lassen.
Die richtige Parameterwahl der Ortsvarianz $\sigma^2$ und der Wertevarianz $\zeta^2$ bei aufeinanderfolgenden Filterschritten ist ganz entscheidend für die Qualität des Ergebnisses einer nichtlinearen Gaußfilterkette. In [Weu94, AuWeu96] wird eine Strategie vorgestellt und experimentell begründet, wie die Parameter in einer Filterkette für Grauwertbilder, also für $n = 2$, zu wählen sind.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Strategie für die Parameterwahl in beliebigen Dimensionen entwickelt, die aus einem tieferen Verständnis des Verfahrens resultiert. Die Strategie für die optimale Parameterwahl erweist sich als dimensionsabhängig. Für $n = 2$ ist die in [Weu94, AuWeu96] für Bilder vorgeschlagene Heuristik ein Spezialfall.

Die Wirkung dieser optimalen Strategie wird anhand eines synthetischen verrauschten Grauwertbildes demonstriert. Unten sind jeweils ein Grauwertbild und darunter der Helligkeitsverlauf der 61. Zeile des Bildes abgebildet:




Links ist das unverrauschte Originalbild abgebildet, das zwei Quadrate auf hellem Hintergrund zeigt. Die Quadrate sind 32 bzw. 64 Grauwerte dunkler als der homogene Hintergrund. In der Mitte ist das mit der Streuung 16 gaußverrauschte Bild abgebildet. Das Ergebnis einer nichtlinearen Gaußfilterkette der Länge 4 mit optimaler Parameterwahl, angewendet auf das verrauschte Bild, ist rechts abgebildet.

| Filterschritt | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma$ (Ort) | 1 | 2 | 4 | 8 |
| $\zeta$ (Wert) | 48 | 16 | 8 | 4 |

### Das nichtlineare Gaborfilter

Eine unverrauschte harmonische Schwingung der Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ hat die Gestalt

$$\varphi_\omega(t) \quad = \quad r \cdot \exp(i\omega t)$$

mit $r \in \mathbb{R}^+$. Das nichtlineare Gaborfilter ist eine Erweiterung des nichtlinearen Gaußfilters mit dem Ziel, verrauschte harmonische Schwingungen sprungerhaltend zu glätten. Das Gaußfilter glättet entlang einer Horizontalen, während das Gaborfilter entlang einer harmonischen Schwingung glättet. Das Gaborfilter kann somit als Verallgemeinerung des Gaußfilters aufgefaßt werden, wobei *horizontal* durch den allgemeineren Begriff *entlang einer harmonischen Schwingung* ersetzt wird. Ist die Frequenz der harmonischen Schwingung nicht bekannt, so muß sie geschätzt werden.

Da das Filterergebnis um so schlechter wird, je mehr die Filterfrequenz von der Signalfrequenz abweicht, ist eine Abstimmung der Frequenzschätzung mit der Parameterwahl bei einer Iteration von Gaborfiltern besonders wichtig. Wie bei der nichtlinearen Gaußfilterkette für stückweise konstante Signale hat man mit der nichtlinearen Gaborfilterkette ein praktisches Werkzeug, mit dem sich auf sehr anschauliche und robuste Weise eine sprungerhaltende Glättung verrauschter, harmonischer Schwingungen erzielen läßt.

Die nichtlineare Gaborfilterkette filtert eine verrauschte, harmonische Schwingung, die Amplituden–, Phasen– und Frequenzsprünge haben darf. Weder über die Frequenz noch über die Existenz oder Art von Sprüngen wird Vorwissen benötigt. Als Ergebnis erhält man eine geglättete harmonische Schwingung mit deutlichen Sprüngen und

→ den Amplituden– und Phasenverlauf,
insbesondere Amplituden– und Phasensprünge

→ den Frequenzverlauf,
insbesondere Frequenzsprünge

Die Sprünge werden parallel zum letzten Filterschritt lokalisiert.

## Der Aufbau der Arbeit

**Kapitel 1**
Die Grundbegriffe der linearen, kontinuierlichen Signalverarbeitung, die für diese Arbeit relevant sind, werden in Kapitel 1 dargelegt. Das lineare Gaußfilter und das lineare Gaborfilter sowie ihre Wirkung im Orts– als auch im Frequenzbereich werden ausführlich vorgestellt. Es wird präzisiert, welches stochastische Modell für verrauschte Signale zugrundegelegt wird, und es wird intensiv auf die Problematik der sprungerhaltenden Glättung eingegangen.

**Kapitel 2**
In Kapitel 2 werden Signale beliebiger Dimension betrachtet. Wir treffen qualitative Aussagen darüber, wie das lineare und im Vergleich dazu das nichtlineare Gaußfilter das Rauschen bei reellwertigen, diskreten, verrauschten, stückweise konstanten Signalen reduziert. Das nichtlineare Gaußfilter ermöglicht es, durch die Wahl der Parameter eine Sprunghöhe vorzugeben, ab der Signalsprünge nur wenig verschmiert werden.

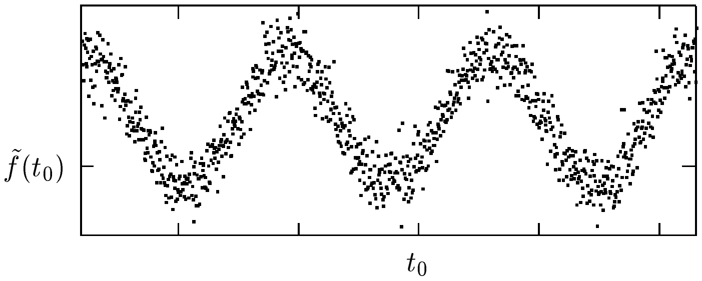
Es werden Strategien für die Parameterwahl bei sogenannten optimalen Filterketten, die das Signal nur minimal verschmieren, entwickelt und begründet. Die Idee der Filterkette sowie die Strategie bei der Parameterwahl lassen sich wie folgt grob skizzieren:
Beim ersten Filterschritt wählen wir eine sehr kleine Ortsumgebung und lassen damit sehr wenige Nachbarwerte in die nichtlineare Mittelung eingehen. Weil dadurch Sprünge im Ort nicht stark verschmiert werden können, erlauben wir bei der Mittelung der Werte größere Abweichungen. Nach diesem nichtlinearen Gaußfilterschritt liegt ein Signal vor, das bereits über kleine Umgebungen geglättet wurde. Wir schließen einen weiteren Filterschritt an, indem wir die Ortsumgebung vergrößern, damit das Ergebnis glatter wird. Gleichzeitig verkleinern wir die Größe der Fensterfunktion, die die Abweichungen in Werterichtung abschneidet, damit vorhandene Signalsprünge nicht verschmiert werden. Dieses Vorgehen läßt sich iterieren, bis das gewünschte Resultat erreicht ist.

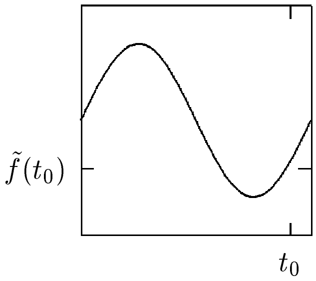
**Kapitel 3**
Ist das verrauschte Signal nicht reell– sondern komplexwertig, kann das lineare Gaußfilter durch eine komponentenweise Definition fortgesetzt werden, indem in kartesischen Koordinaten gemittelt wird. Beim nichtlinearen Gaußfilter müssen wir uns entscheiden, ob wir die Abweichung in Werterichtung in kartesischen oder in Polarkoordinaten gewichten. Je nachdem, ob ein Signal vorliegt, das in Amplitude und Phase oder in Real– und Imaginärteil verrauscht ist, werden wir uns für eine der beiden Möglichkeiten entscheiden. In Kapitel 3 werden die Auswirkungen auf das nichtlineare Gaußfilter für $n$–dimensionale, komplexwertige, diskrete, verrauschte, stückweise konstante Signale dargestellt.

**Kapitel 4**
In Kapitel 4 betrachten wir eindimensionale, komplexe, diskrete, verrauschte harmonische Schwingungen. Wie bereits erwähnt wurde, ist das Gaborfilter eine Verallgemeinerung des Gaußfilters, wobei *horizontal* hier *entlang einer harmonischen Schwingung* bedeutet. Die Strategie für die optimale Parameterwahl bei der nichtlinearen Gaußfilterkette läßt sich direkt auf die nichtlineare Gaborfilterkette übertragen. Da hier zusätzlich die Frequenz, entlang derer geglättet wird, geschätzt werden muß, ist eine zusätzliche Abstimmung mit den Parametern nötig. Ist das Signal verrauscht, wird eine Frequenzschätzung aus dem Signal ebenfalls verrauscht sein. Es ist jedoch für ein gutes Filterergebnis nötig, die Signalfrequenz möglichst genau zu approximieren. Einen durch eine schlechte Filterfrequenz verursachten Schaden können wir in nachfolgenden Filterschritten nicht mehr ausgleichen.

Daher ergänzen wir die Filterkette um einen Vorfilterschritt, der nur dazu dient, die Schätzung der Startfrequenz der Kette zu verbessern. Ein Ergebnis, das durch eine mehrstufige Filterkette mit Vorfilterschritt und mit aufeinander abgestimmten Parametern erzielt wird, läßt sich nicht in einem Filterschritt erreichen.

**Kapitel 5**
Wir bezeichnen den Real– oder Imaginärteil einer harmonischen Schwingung als reelle harmonische Schwingung. In Kapitel 5 wird vorgestellt, wie verrauschte, reelle, harmonische Schwingungen sprungerhaltend geglättet werden. Auch hier gehen wir von der Idee aus, daß wir, wenn die Frequenz bekannt ist, *entlang einer Schwingung* glätten wollen. Stehen wir an einer Stelle $t_0$ in einer reellen harmonischen Schwingung $\tilde{f}$, und wissen wir, an welcher Stelle wir in der Periode der Schwingung stehen, können wir eine unverrauschte Schwingung durch den Wert $f(t)$ legen. Indem wir den Wert $\tilde{f}(t)$ um einen Mittelwert der Abweichungen der extrapolierten Schwingung zu $\tilde{f}$ korrigieren, erhalten wir eine sprungerhaltende Glättung.




Dabei tritt jedoch das folgende Problem auf: Es muß geschätzt werden, an welcher Stelle wir uns innerhalb einer Periode des Signals befinden. Das ist äquivalent dazu, die Phasenlage einer komplexen harmonischen Schwingung $\tilde{F}$, deren Realteil $\tilde{f}$ uns vorliegt, zu schätzen. Der wesentliche Schritt besteht darin, eine Phase oder – was äquivalent dazu ist – einen Imaginärteil geeignet zu ergänzen, um anschließend entlang einer harmonischen Schwingung glätten zu können.

Da wir nur einen verrauschten Realteil $\tilde{f}$ vorliegen haben, gibt es die Möglichkeiten, daß das Rauschen von $\tilde{f}$ durch Amplitudenrauschen oder durch Phasenrauschen der zu $\tilde{f}$ konstruierten komplexen harmonischen Schwingungen $\tilde{F}$ aufgefangen wird. Wir stellen die beiden Möglichkeiten vor, daß das Signalrauschen durch Amplitudenrauschen und annähernd linearer Phase sowie durch Phasenrauschen bei annähernd konstanter Amplitude von $\tilde{F}$ erzeugt wird.

Wir gehen bei der sprungerhaltenden Glättung verrauschter, harmonischer Schwingungen in folgenden Schritten vor: Zuerst ergänzen wir das vorliegende reelle Signal $\tilde{f}$ zu einem komplexen Signal mit Realteil $\tilde{f}$. Dieses Signal glätten wir mit einer nichtlinearen Gaborfilterkette. Den Realteil des Filterergebnisses fassen wir als geglättete reelle harmonische Schwingung auf und die Sprünge im Realteil des Filterergebnisses interpretieren wir als Signalsprünge der harmonischen Schwingung $\tilde{f}$.

# Kapitel 1

# Grundlagen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die wichtigsten Grundlagen der linearen Signalverarbeitung. Es bietet keine erschöpfende Behandlung, sondern will nur einen Rahmen für die Begriffe schaffen, die in den folgenden Kapiteln eine wesentliche Rolle spielen. Dementsprechend wird fast völlig auf Beweise verzichtet. Sie sind in der einschlägigen Literatur zu finden, siehe z.B. [Pap85], [Zem87], [Rud73].

## 1.1 Kontinuierliche Signale und lineare Filter

In technischen Anwendungen tritt häufig die Situation auf, daß eine physikalische Größe $y$ von $n$ Parametern $t_1, \ldots, t_n$ abhängt und man die Art der Abhängigkeit beeinflussen bzw. verändern will. Man spricht dann von einem $n$-dimensionalen Signal und der Verarbeitung dieses Signals.

$y$ kann z.B. die elektrische Spannung sein, die ein Mikrofon in Abhängigkeit von der Zeit $t$ liefert ($n = 1$), oder die Helligkeit der Punkte eines Bildes in einer Kamera ($n = 2$).

Eine typische Verarbeitung solcher Signale ist z.B. die Reduktion von Rauschen in dem Ausgangssignal des Mikrofons oder eine Anhebung des Kontrastes des Bildes.

Ist es physikalisch gerechtfertigt, die Parameter $t_1, \ldots, t_n$ als kontinuierlich variierende reelle Zahlen und die Größe $y$ als reelle oder komplexe Zahl zu modellieren, so spricht man von einem kontinuierlichen, $n$-dimensionalen Signal und modelliert es mathematisch als Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$.

In der linearen Signalverarbeitung spielen die Faltung und die Fouriertransformation sowie deren Zusammenhänge eine wichtige Rolle. Daher ist es günstig, als Definitionsbereich $D$ den ganzen $\mathbb{R}^n$ zu wählen. Bei der Modellierung von Anwendungen haben die auftretenden Signale meist zusätzliche Eigenschaften wie stetig, periodisch, integrierbar. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathsf{C}$ | $=$ | $\mathsf{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ | Vektorraum der stetigen Funktionen (ohne Topologie) |
| $\mathsf{C}_b$ | $=$ | $\mathsf{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ | Banachraum der stetigen, beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^n\}$ |
| $\mathsf{L}^1$ | $=$ | $\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ | Banachraum der Äquivalenzklassen der absolutintegrierbaren Funktionen mit der $\mathsf{L}^1$-Norm $\|f\|_1 = \int |f(t)| \, \mathrm{d}t$ |
| $\mathsf{S}$ | $=$ | $\mathsf{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ | Frechetraum der schnell fallenden Funktionen |

Die Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist im folgenden beliebig, wenn nichts anderes vorausgesetzt wird.

Die mathematische Modellierung wird oft einfacher und mächtiger, wenn man idealisierte Signale wie z.B. Diracmaße oder Ableitungen im distributionellen Sinne zuläßt. Besonders geeignet als Raum verallgemeinerter Signale ist der Raum $\mathsf{S}' = \mathsf{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$, weil er einerseits groß genug ist, um alle gewünschten Signale zu enthalten, und andererseits auf ihm die Fouriertransformation fortgesetzt werden kann (siehe Abschnitt 1.1.1).

$\mathsf{S}'$ ist der topologische Dualraum von $\mathsf{S}$, d.h. der Raum der stetigen Linearformen auf $\mathsf{S}$, versehen mit der schwach–$\star$–Topologie, d.h. der Topologie der punktweisen Konvergenz (siehe z.B. [Rud73]).

**Definition 1.1** *Ein verallgemeinertes n-dimensionales* **Signal** *ist eine temperierte Distribution $f \in \mathsf{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

**Beispiele**

1. Die Räume $\mathsf{C}$, $\mathsf{C}_b$, $\mathsf{L}^1$, $\mathsf{S}$ lassen sich nach $\mathsf{S}'$ einbetten durch $f \mapsto \mu_f$

$$\mu_f(\varphi) \quad := \quad \int f(t) \cdot \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

   für alle $\varphi \in \mathsf{S}$. Statt $\mu_f$ schreiben wir meist $f$.

2. Jedes komplexe Borelmaß $\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ erzeugt eine temperierte Distribution vermöge

$$\varphi \quad \mapsto \quad \int \varphi(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

   Insbesondere erzeugt jedes Diracmaß $\delta_{t_0}$ die Distribution $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$.

3. Sind $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine höchstens polynomial wachsende Folge komplexer Zahlen und $T > 0$, so ist

$$\varphi \quad \mapsto \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(k \cdot T)$$

eine Distribution aus $\mathsf{S}'(\mathbb{R}^1)$, also ein 1-dimensionales Signal, das **Linienspektrum** genannt wird und mit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \cdot \delta_{kT}$$

bezeichnet wird. Das spezielle Signal

$$\mathrm{comb}_T \quad := \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kT}$$

heißt ein **Impulskamm**.

### 1.1.1 Fouriertransformation auf $\mathsf{S}'$

**Definition und Satz 1.2 (Fouriertransformation auf $\mathsf{L}^1$)**
*Sei $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann wird durch*

$$\hat{f}(\omega) \quad := \quad \int f(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega t)\ \mathrm{d}t$$

*eine stetige, beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ definiert, die* **Fouriertransformierte** *von $f$. Dabei ist $\omega t$ das Skalarprodukt von $\omega$ und $t$ im $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathsf{L}^1 \to \mathsf{C}_b$, die definiert ist durch $\mathcal{F}(f) := \hat{f}$, ist stetig und linear. Ist $\hat{f} \in \mathsf{L}^1$, so gilt die Umkehrformel der Fouriertransformation*

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t)\ \mathrm{d}\omega$$

*Die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf $\mathsf{S}$ ist ein topologischer Automorphismus, und für $f \in \mathsf{S}$ gilt:*

$$\hat{\hat{f}} \quad = \quad (2\pi)^n \cdot f_-, \text{ wobei } f_-(t) := f(-t)$$

In der linearen Signalverarbeitung genügt es oft nicht, die Fouriertransformation nur auf $\mathsf{L}^1$ zu betrachten, weil z.B. periodische Signale oder Signale endlicher Energie (d.h. aus $\mathsf{L}^2$) in vielen Anwendungen wichtig sind, aber nicht in $\mathsf{L}^1$ liegen. Ein geeigneter Raum, der alle wichtigen Signale enthält und auf dem die Fouriertransformation definiert werden kann, ist der Raum $\mathsf{S}' = \mathsf{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen.

**Definition 1.3 (Fouriertransformation auf $\mathsf{S}'$)**
*Sei $u \in \mathsf{S}'$. Dann sei die verallgemeinerte Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon \mathsf{S}' \to \mathsf{S}'$ definiert durch*

$$\hat{u}(\varphi) \;:=\; \mathcal{F}u(\varphi) \;:= u(\mathcal{F}(\varphi)) \qquad \forall \varphi \in \mathsf{S}$$

Die Fouriertransformation ist also einfach die adjungierte Abbildung zu der Fouriertransformation auf $\mathsf{S}$ und folglich ein topologischer Automorphismus von $\mathsf{S}'$, wenn man $\mathsf{S}'$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz (schwach-$\star$-Topologie) versieht.

Faßt man $\mathsf{L}^1$ wie oben angegeben als Teilraum von $\mathsf{S}'$ auf, so ist die Fouriertransformation auf $\mathsf{S}'$ eine Fortsetzung der in Definition 1.2 definierten Fouriertransformation auf $\mathsf{L}^1$, denn es gilt für $f \in \mathsf{L}^1$ und $\varphi \in \mathsf{S}$:

$$\hat{u}_f(\varphi) = u_f(\hat{\varphi}) = \int f(t) \cdot \hat{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t \overset{Fubini}{=} \int \hat{f}(t) \cdot \varphi(t)\ \mathrm{d}t = u_{\hat{f}}(\varphi)$$

Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ eines Signals $f$ bezeichnet man als Beschreibung des Signals im **Frequenzbereich**, während man das Signal $f$ selbst als Beschreibung im **Ortsbereich** (oder Zeitbereich für $n = 1$) bezeichnet. Die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation werden im weiteren benötigt:

**(E) 1.4** *Für $f \in \mathsf{L}^1$ gilt: $f$ ist genau dann reell, wenn $\hat{f}$ konjugiert komplex symmetrisch ist.*

**(E) 1.5** *Seien $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(t) = \exp(-i \cdot \omega_0 t)$. Sei $f \in \mathsf{L}^1$. Dann gilt:*

$$(g \cdot f)\,\hat{}\,(\omega) = \hat{f}(\omega + \omega_0)$$

Einer Verschiebung im Frequenzbereich entspricht somit eine Phasenkorrektur im Ortsbereich.

**(E) 1.6** *Für $n = 1$ und $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ gilt:*

$$\begin{array}{lll}
\text{a)}\ \ \hat{\delta}_{\omega_0}\ (t) & = & \exp(-i \cdot \omega_0 t) \\
\text{b)}\ \ \exp(i \cdot \omega_0 t)\hat{} & = & 2\pi \cdot \delta_{\omega_0} \\
\text{c)}\ \ \cos(\omega_0 t)\hat{} & = & \pi \cdot (\delta_{-\omega_0} + \delta_{\omega_0}) \\
\text{d)}\ \ \sin(\omega_0 t)\hat{} & = & \frac{\pi}{i} \cdot (\delta_{-\omega_0} - \delta_{\omega_0})
\end{array}$$

**(E) 1.7** *Sei $T \in \mathbb{R}$. Für einen Impulskamm $\mathrm{comb}_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \delta_{kT}$ in $\mathsf{S}'$ gilt:*

$$\mathrm{comb}_T\hat{} \;\; = \;\; \frac{2\pi}{T} \cdot \mathrm{comb}_{\frac{2\pi}{T}}$$

**(E) 1.8** *Sei $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Dann sei die nichtnormierte Gaußglocke $g_\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Varianz $\sigma^2$ definiert durch*

$$g_\sigma(t) \quad := \quad \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

*Dann ist $g_\sigma \in \mathsf{S}$ und es gilt $\hat{g}_\sigma = \sqrt{2\pi}\sigma \cdot g_{\frac{1}{\sigma}}$.*

Die Fouriertransformierte einer Gaußglocke ist eine Gaußglocke, die um so schmaler ist, je größer $\sigma$ ist.

**Folgerung 1.9** *Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt $g_{\sigma_1} \cdot g_{\sigma_2} = g_{\sigma_3}$ mit*

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Das Produkt von Gaußglocken ist eine Gaußglocke.

### 1.1.2 Lineare Filter

Im Mittelpunkt der linearen Signalverarbeitung stehen spezielle lineare, translationsinvariante Operatoren, nämlich die Faltungsoperatoren.

**Definition 1.10** *Seien $f, g \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Dann sei die Faltung $f * g$ von $f$ und $g$ definiert durch*

$$f * g\ (t_0) \quad := \quad \int f(t) \cdot g(t_0 - t)\ \mathrm{d}t$$

**Satz 1.11** *Für $f, g \in \mathsf{L}^1$ ist $f * g \in \mathsf{L}^1$. Die Faltung $* \colon \mathsf{L}^1 \times \mathsf{L}^1 \to \mathsf{L}^1$ ist bilinear, kommutativ und assoziativ, und es gilt:*

$$(f * g)\hat{} \;=\; \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \textit{und} \quad (f \cdot g)\hat{} \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \hat{f} * \hat{g}$$

*Man kann somit die Faltung zweier $\mathsf{L}^1$-Signale mit Hilfe der Fouriertransformation auf die Multiplikation zurückführen. Für jedes $h \in \mathsf{L}^1$ ist der Faltungsoperator $\mathsf{L}^1 \to \mathsf{L}^1$, $f \mapsto h * f$ linear und translationsinvariant (d.h. er kommutiert mit den Translationen).*

Leider lassen sich Faltung und Multiplikation nicht für beliebige Signale $f, g \in \mathsf{S}'$ sinnvoll definieren. Ohne genauer darauf einzugehen, in welchen Fällen dies noch möglich ist (siehe z.B. [Sch66]), definieren wir lineare Filter wie folgt:

**Definition 1.12** *Sei* $h \in \mathsf{S}'$. *Der partiell definierte Faltungsoperator* $H\colon \mathsf{S}' \to \mathsf{S}'$, $H(f) := h * u$ *heißt ein* **lineares Filter** *mit* **Impulsantwort** $h$ *und* **Übertragungsfunktion** $\hat{h} = \mathcal{F}(h)$. *Der Definitionsbereich von* $H$ *besteht aus den* $u \in \mathsf{S}'$, *für die* $h * u$ *definiert ist.*

**Beispiele für spezielle lineare Filter, die auf ganz $\mathsf{S}'$ definiert sind**

1. Impulsantwort $h = \delta_{t_0}$
   Für $u \in \mathsf{S}'$ ist $h * u = \delta_{t_0} * u$ definiert durch

   $$\delta_{t_0} * u(\varphi) \quad := \quad u(\tau_{-t_0}\varphi)$$

   wobei $\tau_{-t_0}\varphi(t) := \varphi(t + t_0)$ ist. Wird $u$ von einer Funktion $f$ erzeugt, also $u = u_f$, so wird $\delta_{t_0} * u$ von der um $-t_0$ verschobenen Funktion $\tau_{t_0} f$ mit $\tau_{t_0} f(t) := f(t - t_0)$ erzeugt. Ist $u = \delta_{t_1}$, so ist $\delta_{t_0} * u = \delta_{t_0 + t_1}$. Die Faltung mit $\delta_{t_0}$ bewirkt also lediglich eine Translation um $t_0$.

2. Impulsantwort $h \in \mathsf{S}$ (z.B. eine Gaußglocke)
   Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\tau_x h_-(t) := h(x - t)$. Sei $u \in \mathsf{S}'$. Dann ist $x \mapsto u(\tau_x h_-)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die höchstens polynomial wächst, also eine Distribution aus $\mathsf{S}'$ erzeugt, die mit $h * u$ bezeichnet wird (Theorem 7.19 [Rud73]).

**Beschreibung linearer Filter im Frequenzbereich**
Ist $u$ im Definitionsbereich eines linearen Filters $H$ mit Impulsantwort $h$, so läßt sich $\hat{h} \cdot \hat{u}$ definieren und es gilt $\widehat{h * u} = \hat{h} \cdot \hat{u}$. Dies bedeutet, daß sich ein lineares Filter im Frequenzbereich als Multiplikationsoperator beschreiben läßt. Im Falle, daß $\hat{h}$ eine Funktion ist, erhält man eine anschauliche Beschreibung, wie das Filter auf $f \in \mathsf{L}^1$ wirkt:

$$Hf \;=\; \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(h * f) \;=\; \mathcal{F}^{-1}(\hat{h} \cdot \hat{f})$$

und wenn $\hat{h} \cdot \hat{f} \in \mathsf{L}^1$ ist, folgt

$$Hf(t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t)\, \mathrm{d}\omega$$

Versteht man $\hat{f}$ als Zerlegung von $f$ in harmonische Schwingungen mit der Frequenz $\omega$, der Amplitude $|\hat{f}(\omega)|$ und der Phasenlage $\arg \hat{f}(\omega)$, so gibt der Wert $\hat{h}(\omega)$ der Übertragungsfunktion an, wie Amplitude und Phasenlage des Anteils mit Frequenz $\omega$ durch $H$ geändert werden.

Wenn z.B. die Impulsantwort $h$ eine normierte Gaußglocke mit Varianz $\sigma^2$ ist, so ist nach (E) 1.8 $\hat{h} = g_{\frac{1}{\sigma}}$ ebenfalls eine Gaußglocke; die Phasenlagen werden also nicht verändert, die Amplituden werden jedoch mit wachsender Frequenz $\omega$ reduziert. Daher spricht man von einem Gaußschen Tiefpaßfilter.

### 1.1.3 Beispiele für lineare Filter

Für diese Arbeit sind lineare Gaußfilter und Gaborfilter wichtig. Das in dieser Arbeit vorgestellte nichtlineare Gaborfilter hängt mit beiden Filtern eng zusammen.

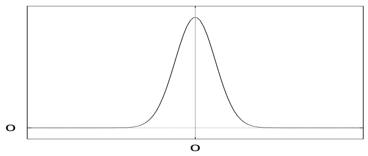
#### Das lineare Gaußfilter

Sei $\eta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist das $n$-dimensionale, isotrope, lineare Gaußfilter mit Varianz $\eta^2$ wie folgt definiert: Die Impulsantwort ist eine normierte Gaußglocke

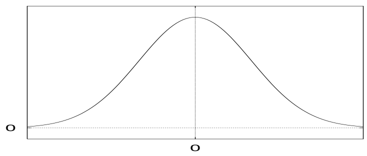
$$t \longmapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\eta)^n} \cdot g_\eta(\|t\|)$$

Nach (E) 1.8 ist die Übertragungsfunktion eine nicht normierte Gaußglocke mit Varianz $\frac{1}{\eta^2}$, die um so breiter ist, je schmaler die Impulsantwort ist.

Durch die Faltung im Ortsbereich mit einer Gaußglocke wird das Signal geglättet, und es werden Sprünge verschmiert. Durch die Darstellung im Frequenzbereich wird deutlich, daß dieser Effekt durch das Unterdrücken von hohen Frequenzanteilen verursacht wird. Das Gaußfilter wird daher auch mit Gaußtiefpaß bezeichnet.



Ortsbereich



Frequenzbereich

Wie stark hohe Frequenzen gedämpft werden, kann über die Varianz $\eta^2$ eingestellt werden: Je größer $\eta$ gewählt wird, um so stärker ist die Dämpfung.

#### Die Komposition von Gaußfiltern

Sei $k \in \mathbb{N}$. $G_\eta$ bezeichne das linearen Gaußfilter mit Varianz $\eta^2 \in \mathbb{R}^+$. Seien $\eta_j \in \mathbb{R}^+$ für $j = 1 \ldots k$. Dann gilt für die Komposition $G_{\eta_1} \circ \ldots \circ G_{\eta_k}$, daß sie im Ortsbereich die Faltung mit

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\eta_j\right)^n} \cdot g_{\eta_k} * \cdots * g_{\eta_1}$$

und im Frequenzbereich die Multiplikation mit

$$g_{\frac{1}{\eta_1}} \bullet \cdots \bullet g_{\frac{1}{\eta_k}}$$

ist. Nach Bemerkung 1.9 entspricht der Filter im Frequenzbereich der Multiplikation mit einer Gaußglocke der Varianz

$$\eta^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \eta_j^2}$$

Aus (E) 1.8 folgt, daß die Komposition von Gaußfiltern ein Gaußfilter ist:

$$G_{\eta_1} \circ \ldots \circ G_{\eta_k} = G_\eta \quad \text{mit} \quad \eta \;=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \eta_j^2}$$

Jedes Filterergebnis einer linearen Gaußfilterkette, d.h. einer Hintereinanderausführung von linearen Gaußfiltern, kann somit durch einen einzigen Filterschritt erzielt werden.

**Das lineare Gaborfilter**

Seien $\eta \in \mathbb{R}^+$ und $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$. Das $n$-dimensionale lineare Gaborfilter der Frequenz $\omega_0$ mit Varianz $\eta^2$ ist wie folgt definiert: Die Übertragungsfunktion ist eine in $\omega_0$ zentrierte Gaußglocke der Varianz $\frac{1}{\eta^2} \in \mathbb{R}$:

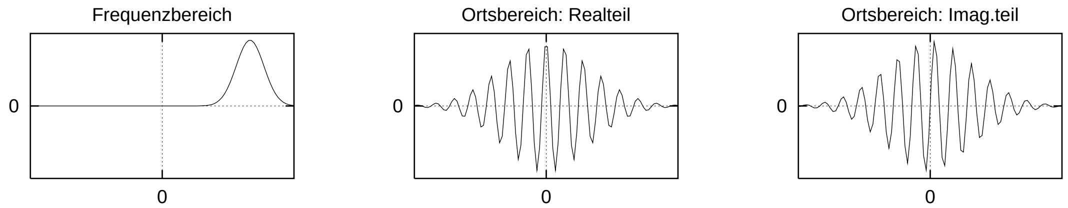
$$\omega \;\longmapsto\; g_{\frac{1}{\eta}}(\|\omega - \omega_0\|) \;=\; g_{\frac{1}{\eta}} * \delta_{\omega_0}(\omega)$$

Das Gaborfilter entsteht aus dem Gaußfilter durch Verschieben der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich und dämpft Frequenzanteile eines Signals um so mehr, je weiter sie von $\omega_0$ entfernt sind.

Da die Multiplikation mit der Übertragungsfunktion jede konjugiert komplexe Symmetrie zerstört, ist nach (E) 1.4 ein Gaborfilterergebnis komplexwertig. Die Impulsantwort ist gegeben durch

$$t \;\longmapsto\; \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\eta\right)^n} \cdot \exp\left(i \cdot \omega_0 t\right) \cdot g_\eta(\|t\|)$$

Sie ist eine komplexe Schwingung mit Frequenz $\omega_0$ und einer Gaußglocke der Varianz $\frac{1}{\eta^2}$ als Hüllkurve.




Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(t) := \exp(i \cdot \omega_0 (t_0 - t))$. Dann entspricht die Multiplikation mit $p$ einer **Phasenkorrektur** um die Frequenz $\omega_0$ zur Stelle $t_0$. Im Ort wird der lineare Gaborfilteroutput eines Signals $f$ an einer Stelle $t_0$ wie folgt berechnet:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\eta\right)^n} \int g_\eta(\|t_0 - t\|) \cdot \exp(i \cdot \omega_0 (t_0 - t)) \cdot f(t)\; \mathrm{d}t$$

Er entspricht somit bis auf einen Faktor der Faltung einer Gaußglocke mit den durch $p$ phasenkorrigierten Werten von $f$.

**Bemerkung 1.13** *Das lineare Gaborfilter zur Frequenz* $\omega_0$ *kann im Ortsbereich als ein durch Phasenkorrektur um die Frequenz* $\omega_0$ *modifizierter Gaußtiefpaß interpretiert werden.*

## 1.2 Diskrete Signale und diskrete lineare Filter

### 1.2.1 Abtastung

Für die Verarbeitung von Signalen im Digitalrechner müssen die orts- oder zeit- und intensitätskontinuierlichen Signale in diskrete Signale umgewandelt werden. Das geschieht mittels Diskretisierung im Definitions- und Wertebereich. Auf die Diskretisierung im Wertebereich, auch Quantisierung genannt, wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

Die Diskretisierung im Ortsbereich wird meist als Abtastung modelliert, d.h. man ersetzt das kontinuierliche $n$-dimensionale Signal $f$ durch die Folge seiner Werte $(f(t_k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ in vorgegebenen Abtaststellen $t_k$ im $\mathbb{R}^n$. Damit dies überhaupt definiert ist, muß man voraussetzen, daß $f$ in den $t_k$ wohldefinierte Werte besitzt, z.B. eine stetige Funktion ist. Außerdem sollte die Abtastung so erfolgen, daß das abgetastete Signal durch die Abtastwerte eindeutig bestimmt ist. Das Abtasttheorem von Shannon gibt Bedingungen an, unter welchen dies der Fall ist. Der Einfachheit halber formulieren wir es für 1-dimensionale Signale und äquidistante Abtaststellen. Es gibt aber zahlreiche Verallgemeinerungen, z.B. in [Pap85], [BBNS87].

**Satz 1.14 (Abtasttheorem von Shannon)**
*Sei $T \in \mathbb{R}^+$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei beschränkt und meßbar und in den Stellen $k\cdot T$ für $k \in \mathbb{Z}$ stetig. Ist der Träger von $\hat{f}$ in $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ enthalten, so ist $f$ durch die Abtastwerte*

$$(f(kT))_{k\in\mathbb{Z}}$$

*fast überall eindeutig bestimmt und es gilt*

$$f \;=\; T\cdot\mathcal{F}^{-1}\left((f\cdot \mathrm{comb}_T)\hat{}\;\cdot\;\chi_{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}\right)$$

*wobei $f\cdot\mathrm{comb}_T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\cdot\delta_{kT} \in \mathsf{S}'$.*

Beweisskizze:

$$(f\cdot\mathrm{comb}_T)\hat{}\;\overset{Satz 1.11}{=}\;\frac{1}{2\pi}\hat{f} * \mathrm{comb}_T\hat{}\;\overset{(E)1.7}{=}\;\frac{1}{T}\hat{f} * \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\frac{2\pi}{T}} \;=\; \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tau_{k\frac{2\pi}{T}}\hat{f}$$

Weil der Träger von $\hat{f}$ in $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ liegt, folgt die Behauptung.

**Bemerkung 1.15** *So wie wir die Fouriertransformation definiert haben, ist die Variable $\omega$ im Frequenzbereich die sogenannte Kreisfrequenz, die wirkliche Frequenz ist $\frac{\omega}{2\pi}$. Daher definiert man die* **Bandbreite** *$\beta$ von $f$ durch*

$$\beta \quad := \quad \frac{1}{2\pi}\cdot\inf\left\{\omega : [-\omega,\omega] \text{ enthält den Träger von } \hat{f}\right\}$$

*und die* **Abtastfrequenz** $\alpha$ *durch*

$$\alpha \quad := \quad \frac{1}{T}$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet die Aussage von Satz 1.14:

**Satz 1.16** *Ist die Abtastfrequenz größer als die doppelte Bandbreite von $f$, so ist $f$ durch die Abtastwerte fast überall eindeutig bestimmt.*

### 1.2.2 Diskrete Signale

In Anwendungen stehen natürlich nur endlich viele Abtastwerte zur Verfügung. Daher treffen wir folgende Definition:

**Definition 1.17** *Ein $n$–***dimensionales diskretes Signal** *ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. Ein* **örtlich** *(oder für $n = 1$ auch zeitlich)* **begrenztes Signal** *ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{Z}^n$. Häufig ist $D$ ein Quader $[\![a, b]\!]$ in $\mathbb{Z}^n$, wobei $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $[\![a, b]\!] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \cap \mathbb{Z}$.*

**Beispiel 1.18** *Für $\omega_0, t \in \mathbb{R}$ sei $\psi_{\omega_0}(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Die Einschränkung $\psi_{\omega_0}|_{\mathbb{Z}}$ nennen wir eine 1-dimensionale* **diskrete, harmonische Schwingung**. *Betrachtet man sie als Abtastung der kontinuierlichen Schwingung $\psi_{\omega_0}$ in den Abtaststellen $(k)_{k\in\mathbb{Z}}$, so ist das Kriterium von Shannons Abtasttheorem erfüllt, wenn $\omega_0 < \pi$; denn nach (E) 1.6 ist $\hat{\psi}_{\omega_0} = 2\pi\delta_{\omega_0}$ und $T = 1$.*

**Beispiel 1.19** *Sei $l \in \mathbb{N}$. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei $\phi_\omega\colon [\![0, l]\!] \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$\phi_\omega(t) \quad := \quad \exp\left(\frac{2\pi i}{l+1} \cdot \omega \cdot t\right)$$

*Wir nennen $\phi_\omega$ eine* **zeitlich begrenzte, diskrete harmonische Schwingung** *der Frequenz $\omega$ auf dem Intervall $[\![0, l]\!]$. Der Faktor $\frac{2\pi i}{l+1}$ bewirkt, daß $\omega$ gerade die Anzahl der in $[0, l]$ enthaltenen Perioden von $\exp(\frac{2\pi i}{l+1}\omega t)$ ist. Das ist für Rechnerexperimente praktisch. Das Abtasttheorem für $\phi_{\omega_0}$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi i}{l+1}\omega$ ist erfüllt, wenn $\frac{2\pi i}{l+1}\omega < \pi$, also $\omega < \frac{l+1}{2}$ gilt.*

**Bemerkung 1.20** *Im folgenden werden wir davon ausgehen, daß die diskreten Signale, die wir verarbeiten, vorgegeben sind. Wie sie aus kontinuierlichen Signalen entstanden sein könnten, wird nicht in unsere Untersuchungen eingehen.*

### 1.2.3 Diskrete lineare Filter

In Analogie zum kontinuierlichen Fall definieren wir

**Definition 1.21** *Sei $h\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Der partiell definierte Faltungsoperator*

$$H\colon \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}, \qquad H(f) := h * f$$

*heißt ein* **diskretes lineares Filter** *mit Impulsantwort $h$. Der Definitionsbereich von $H$ besteht aus den $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, für die*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h(k)\cdot f(t-k)$$

*für jedes $t \in \mathbb{Z}^n$ konvergiert.*

Auch für diskrete lineare Filter kann man mit Hilfe von Fouriertechniken (der sogenannten $z$-Transformation) Beschreibungen im Frequenzbereich entwickeln. Mathematisch gesehen läuft dies im wesentlichen darauf hinaus, diskrete Signale $f$ mit höchstens polynomialem Wachstum als Signale der Gestalt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\cdot \delta_k \in \mathsf{S}'$$

aufzufassen und dann die Ergebnisse über kontinuierliche Signale anzuwenden.

Bei der Konstruktion von diskreten Filtern geht man häufig von kontinuierlichen linearen Filtern aus, deren Eigenschaften man gut kennt, und tastet deren Impulsantwort $h$ ab. Falls die Bandbreite von $h$ und den verarbeiteten Signalen sehr viel kleiner als die Abtastfrequenz ist, wird das Ergebnis eine gute Approximation des Ergebnisses des kontinuierlichen Filters sein. Diese Zusammenhänge wollen wir hier nicht weiter verfolgen, siehe z.B. [Pap85].

Auch diskrete lineare Filter im obigen Sinn sind noch idealisierte Modelle, die für praktische Anwendungen noch modifiziert werden müssen. Denn in Anwendungen sind alle Signale örtlich begrenzt (man denke nur an Bilder). Deshalb muß man die unendliche Summation bei der Faltung $h * f$ geeignet modifizieren. Hat die Impulsantwort endlichen Träger (FIR-Filter, Finite Impulse Response), so ist die Summe zwar endlich, trotzdem muß man festlegen, wie man die Summe

$$\sum h(t)\cdot f(t-k)$$

in Definition 1.21 für $t$, die so nahe am Rand des Definitionsbereiches liegen, daß über nicht definierte Terme summiert wird, modifizieren will. Es gibt dafür kein einheitliches Vorgehen. Oft wird das Filterergebnis nur auf einem kleinen (inneren) Bereich definiert. Das kann jedoch bei mehrfacher Anwendung des Filters zu kuriosen Ergebnissen führen.

Die speziellen diskreten Filter, die wir im folgenden untersuchen werden, werden wir von vornherein stets für örtlich begrenzte Signale so definieren, daß die Ergebnissignale wieder denselben Definitionsbereich haben.

### 1.2.4 Das diskrete, lineare Gaußfilter

Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $t_0 \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$\mathbb{B}_n(t_0, r) \ := \ \{t \in \mathbb{Z}^n \ : \ \|t - t_0\| \leq r\}$$

wobei - wenn nichts anderes gesagt wird - als Norm $\| \ . \ \|$ die euklidische Norm verwendet wird. Ist die Dimension $n$ bekannt, so setzen wir $\mathbb{B}(t_0, r) := \mathbb{B}_n(t_0, r)$.

**Definition 1.22** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\eta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist das $n$-dimensionale* **diskrete lineare Gaußfilter** $G_\eta^{\text{LIN}}$ *mit Varianz $\eta^2$ für ein Signal $f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ und $t_0 \in \mathbb{Z}^n$ definiert durch:*

$$G_\eta^{\text{LIN}}(f)(t_0) \ := \ \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot f(t)$$

*mit Normierungsfaktor $M := \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} g_\eta(\|t - t_0\|)$.*

In praktischen Anwendungen ist das Eingangssignal $f \colon D \to \mathbb{C}$ meist örtlich beschränkt auf einem Quader $[\![a, b]\!] \subset \mathbb{Z}^n$, und die Summation wird auf eine Umgebung $U(t_0)$ von $t_0$ beschränkt, außerhalb welcher $g_\eta(\|t - t_0\|)$ nur noch sehr kleine Werte annimmt, also z.B. $U(t_0) = \mathbb{B}_n(t_0, r)$ mit $r = 3\eta$ oder $r = 2\eta$.

Für praktische Implementierungen ist es günstiger, $U(t_0)$ als Quader mit entsprechenden Kantenlängen von $4\eta + 1$ oder $6\eta + 1$ zu wählen. Damit sich die Gewichtskoeffizienten zu 1 summieren, braucht man dann einen ortsabhängigen Normierungsfaktor.

**Definition 1.23** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\eta \in \mathbb{R}^+$. Sei $f \colon D \to \mathbb{C}$ ein örtlich beschränktes Signal. Das das $n$-dimensionale* **diskrete lineare Gaußfilter** $G_\eta^{\text{LIN}}$ *mit Varianz $\eta^2$* **für örtlich begrenzte Signale** *hat die Gestalt*

$$G_\eta^{\text{LIN}}(f)(t_0) \ := \ \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot f(t)$$

*mit $M(t_0) := \sum_{t \in U(t_0) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|)$.*

Für vektorwertige reelle Eingangssignale $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $f_k \colon D \to \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, m$ definiert man $G_\eta^{\text{LIN}}(f)$ einfach komponentenweise:

$$G_\eta^{\text{LIN}}(f) \ = \ \left(G_\eta^{\text{LIN}}(f_1), \ldots, G_\eta^{\text{LIN}}(f_m)\right)$$

Das diskrete lineare Gaußfilter glättet ein Signal durch eine gaußgewichtete Mittelung.
Wir untersuchen in Kapitel 2 die stochastischen Eigenschaften der gaußgewichtete Mittelung von Zufallsvariablen und leiten daraus qualitative Aussagen über die Güte des linearen Gaußfilters her.

### 1.2.5 Das diskrete, lineare Gaborfilter

**Definition 1.24** *Seien $\eta \in \mathbb{R}^+$ und $\omega \in \mathbb{R}^n$. Das n-dimensionale* **diskrete nichtlineare Gaborfilter** $G_\eta^{\omega,\text{LIN}}$ *mit der* **Filterfrequenz** $\omega$ *ist definiert durch*

$$G_\eta^{\omega,\text{LIN}}(f)(t_0) \quad := \quad \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot \exp\left(i \cdot \omega(t_0 - t)\right) \cdot f(t)$$

*mit Normierungsfaktor $M := \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} g_\eta(\|t - t_0\|)$ für alle $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$.*

**Bemerkung 1.25 (Zusammenhang zwischen Gaußfilter und Gaborfilter)** *Das Gaußfilter erhält man als Spezialfall aus dem Gaborfilter mit Filterfrequenz $\omega = 0$.*

$$G_\eta^{0,\text{LIN}} \quad = \quad G_\eta^{\text{LIN}}$$

*Umgekehrt erhält man das Gaborfilter aus dem Gaußfilter durch eine Phasenkorrektur im Ort, die einer Verschiebung der Übertragungsfunktion um $\omega$ im Frequenzbereich entspricht.*

Wie beim Gaußfilter wird in der Anwendung bei Signalen $f : D \to \mathbb{C}$ über einen endlichen Bereich $U(t_0)$ summiert. Man erhält einen lokal variierenden Normierungsfaktor

$$M(t_0) \quad := \sum_{t \in U(t_0) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|)$$

## 1.3 Verrauschte diskrete Signale

Eine wichtige Aufgabe der Signalverarbeitung ist die Elimination oder Reduktion von Störungen. Meist geht man davon aus, daß ein Signal $f$ aus einem idealen Signal durch Addition oder Multiplikation eines Störsignals entsteht und daß das Störsignal zufällig (in einem noch zu präzisierenden Sinn) ist. Man spricht dann von additivem oder multiplikativem Rauschen. Die Zufälligkeit des Störsignals wird durch die Annahme modelliert, daß seine Werte Realisierungen von Zufallsvariablen sind. Diese Zufallszahlen setzt man oft – mit einem mehr oder weniger gerechtfertigtem Verweis auf den zentralen Grenzwertsatz – als normalverteilt voraus. So sind z.B. die Speckle-Störung bei Inferometrie mit kohärentem Licht annähernd normalverteilt [LS75]; Ähnliches gilt für die Speckle-Störungen von SAR-Bildern (Synthetisches Apertur Radar). Auch die feinen Grauwertschwankungen in Videobildern haben meist eine glockenförmige Verteilung.

In der Praxis liegen die Abtastwerte aller gemessenen Signale infolge des endlichen Dynamisierungsumfangs der Verstärker und Analog-Digital-Umsetzer stets in einem kompakten Bereich. Selbst wenn die physikalischen Störgrößen normalverteilt sind, so kann man ihre Verteilung nach der Quantisierung bestenfalls durch eine abgeschnittene und renormierte Normalverteilung beschreiben.

Wenn die Normalverteilung weit außen abgeschnitten wird, ist für etliche Überlegungen der Unterschied zur wirklichen Normalverteilung vernachlässigbar gering, außer, daß eben keine Realisierungen mit beliebig großen Abweichungen vom Erwartungswert vorkommen können.
Für $\mu \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ sei $N(\mu; \sigma^2)$ die (isotrope) **Normalverteilung** auf dem $\mathbb{R}^m$.

### 1.3.1 Modellierung des Verrauschens reeller Signale

**Definition 1.26 (Additiv verrauschte reelle Signale)**

1. *Seien $D \subset \mathbb{Z}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Für jedes $t \in D$ sei $X_t$ eine ZV mit Werten im $\mathbb{R}^m$ und Erwartungswert 0. Dann heißt die Familie von ZV*

$$f(t) \; + \; X_t, \qquad t \in D$$

*ein* **verrauschtes Signal**, *das aus $f$ durch additives Rauschen hervorgegangen ist.*

2. *Ist die Familie von ZV $(X_t)_{t \in D}$ unabhängig und identisch verteilt, so spricht man von* **weißem Rauschen** *(in der Literatur wird dies oft als weißes Rauschen im strengen Sinne bezeichnet).*

### 1.3.2 Zwei Modelle für das Verrauschen komplexer Signale

Bei der Verarbeitung komplexwertiger Signale bieten sich vor allem zwei Möglichkeiten zur Darstellung der komplexen Signalwerte an:

1. in kartesischen Koordinaten: $f(t) = \mathrm{Re} f(t) + i \cdot \mathrm{Im} f(t)$
2. in Polarkoordinaten: $f(t) = |f(t)| \cdot \exp(i \arg f(t))$

Je nach Anwendung kann es sinnvoll sein, additives Rauschen durch Addition von Störtermen zu den Koordinaten der einen oder der anderen Darstellung zu modellieren.

**Definition 1.27** *$f$ sei ein $n$-dimensionales diskretes Signal mit Definitionsbereich $D$. Für jedes $t \in D$ seien $U_t$ und $V_t$ reelle Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0.*

1. *Die Familie von Zufallsvariablen*

$$\mathrm{Re} f(t) + U_t \; + \; i \cdot (\mathrm{Im} f(t) + V_t)$$

   *heißt ein verrauschtes Signal, das aus $f$ durch* **Realteil-Imaginärteil-Rauschen** *hervorgegangen ist.*

2. *Die Familie von Zufallsvariablen*

$$(|f(t)| + U_t) \; \cdot \; \exp\left(i \cdot \arg f(t) + V_t\right)$$

   *heißt ein verrauschtes Signal, das aus $f$ durch* **Amplituden-Phasen-Rauschen** *hervorgegangen ist.*

3. *Ist die Familie von Zufallsvariablen $(U_t, V_t)_{t \in D}$ unabhängig und identisch verteilt, so spricht man von* **weißem Rauschen**.

Im folgenden Abschnitt wird untersucht, wie die beiden Modelle zusammenhängen.

### 1.3.3 Vergleich der Modelle

Sei $f$ ein $n$-dimensionales diskretes Signal mit Definitionsbereich $D$. Seien $t \in D$, $u_t := \mathrm{Re} f(t)$, $v_t := \mathrm{Im} f(t)$, $U_t$ und $V_t$ unabhängige, reelle, $N(0; \sigma_x^2)$- b.z.w. $N(0; \sigma_y^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Sei

$$u_t + U_t + i(v_t + V_t)$$

die aus $f(t)$ durch Realteil-Imaginärteil-Rauschen entstandene Zufallsvariable. In kartesischen Koordinaten hat ihre Verteilung die Dichte

$$d_{Re,Im}(x, y) \quad = \quad \exp\left(-\frac{(u_t - x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(v_t - y)^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

Welche Dichte $d_{Amp,Phas}$ hat sie in Polarkoordinaten? Nach dem Transformationssatz für Integrale gilt :

$$\begin{aligned} d_{Amp,Phas}(r,\varphi) &= r \cdot \exp\left(-u_t^2 + 2u_t r\cos\varphi - r^2\cos\varphi^2\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-v_t^2 + 2v_t r\sin\varphi - r^2\sin\varphi^2\right) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.28** *Das durch normalverteiltes Real-Imaginärteil-Rauschen hervorgerufene Amplituden-Phasen-Rauschen ist somit korreliert.*

Wir nehmen vereinfachend an, daß gilt: $\sigma := \sigma_x = \sigma_y$. Sei

$$c := \exp\left(-\frac{(u_t^2 + v_t^2)}{2\sigma^2}\right)$$

Dann hat die Dichte $d_{Amp,Phas}$ des durch $d_{Re,Im}$ erzeugten Amplituden-Phasen-Rauschens folgende Gestalt:

$$d_{Amp,Phas}(r,\varphi) = c \cdot r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(r \cdot \frac{< (u_t, v_t)|(\cos\varphi, \sin\varphi) >}{\sigma^2}\right)$$

Ist $(u_t, v_t) = (x_0, 0)$, so gilt

$$d_{Amp,Phas}(r,\varphi) = r \cdot \exp\left(\frac{-x_0^2 - r^2 + 2rx_0\cos\varphi}{2\sigma^2}\right)$$

Für kleine $\varphi$, d. h. für $\varphi$ nahe bei 0, gilt:

$$-x_0^2 - r^2 + 2rx_0 \approx -(r - x_0)^2$$

Somit können wir approximativ für $r$ nahe bei $x_0 \gg 0$ schreiben:

$$x_0 \cdot \exp\left(\frac{(r - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = x_0 \cdot g_\sigma(r - x_0)$$

Wir erhalten somit

$$d_{Amp,Phas}(r,\varphi) \approx g_\sigma(r - x_0)$$

**Bemerkung 1.29** *Mit obigen Einschränkungen gilt: Die Verteilung des durch normalverteiltes Real-Imaginärteil-Rauschen hervorgerufenen Rauschens auf Amplitude und Phase kann bis auf Terme der Ordnung 2 durch eine $N(0;\sigma^2)$-Verteilung approximiert werden, wenn die Amplitude im Vergleich zur Rauschvarianz groß ist.*

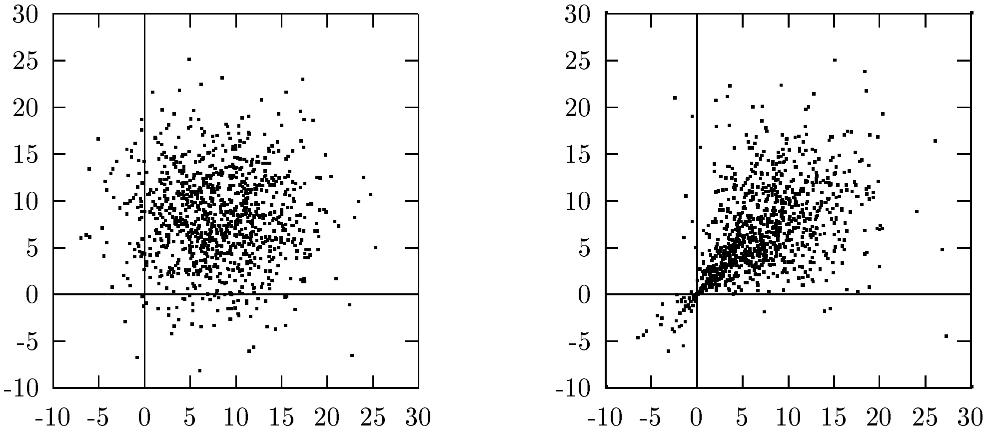
Diese Aussage stimmt nicht, wenn die Amplitude klein und das Rauschen groß ist:

**Bemerkung 1.30** *Ist $|f(t)| = 0$, so gilt:*

$$d_{Amp,Phas}(r,\varphi) = c \cdot r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

*Die rechte Seite ist die Dichte einer Rayleigh-Verteilung.*

**Beispiel 1.31** *Die folgende Abbildung zeigt die Werte von zwei konstanten komplexen Signalen der Länge 1024, die durch weißes normalverteiltes Rauschen gestört sind.*




*Links sieht man die Werte eines Signals, das in Real- und Imaginärteil verrauscht ist mit den Varianzen $\rho_{Re} = \rho_{phas} = 5$. Real- und Imaginärteil des unverrauschten Signals sind gleich* 8.

*Rechts sind die Werte eines in Amplitude und Phase verrauschten Signals. Die Rauschvarianzen betragen $\rho_{amp} = 6.0$ und $\rho_{phas} = 0.1\pi$. Real- und Imaginärteil des unverrauschten Signals sind gleich* 10. *Man sieht, daß Real- und Imaginärteil nicht unabhängig verrauscht sind.*

### 1.3.4 Erzeugung von synthetischem Rauschen

Ist $X = (X_1, X_2)$ eine auf $(0,1)^2$ gleichverteilte ZV, so sind $X_1$ und $X_2$ unabhängig verteilt. Betrachte die ZV $Y = (Y_1, Y_2)$ mit

$$\begin{aligned} Y_1 &:= \sqrt{-2\ln(X_1)} \cdot \cos(2\pi X_2) \\ Y_2 &:= \sqrt{-2\ln(X_1)} \cdot \sin(2\pi X_2) \end{aligned} \qquad (\mathbf{T})$$

Dann gilt $(X_1, X_2) = f(Y_1, Y_2)$ mit $f = (f_1, f_2)$ und $f_i \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R} \times 0\} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &:= \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \\ f_2(y_1, y_2) &:= \frac{1}{2\pi} \cdot \arctan\frac{y_1}{y_2} \end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz für Integrale hat die Verteilung von $Y$ die Dichte $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $d(y_1, y_2) = |J|$ und $J$ ist die Jacobimatrix von $f$:

$$
\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right)^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right)^{-1} \cdot \frac{y_1^2}{y_2^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Daher sind $Y_1$ und $Y_2$ unabhängige $N(0;1)$-verteilte ZV auf $\mathbb{R}$.

### Generierung von Pseudozufallszahlen

Aus zwei unabhängigen, auf $(0,1)$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen werden mit obigem Trick zwei $N(0;1)$-verteilte Zufallszahlen erzeugt.

- **Gleichverteilte Pseudozufallszahlen** $\in (0,1)$ werden z.B. mit der C-Lib-Funktion `drand48` erzeugt.

- **Gaußverteilte Pseudozufallszahlen** werden aus einer Folge $(x_j)_{j=1,\ldots,l}$ von auf $(0,1)$ gleichverteilte Pseudozufallszahlen erzeugt: Sei $l$ gerade. Durch die anschließende Transformation (**T**), angewendet auf die Paare $(x_{2\cdot j-1}, x_{2\cdot j})$ für alle $j = 1, \ldots, l/2$ wird dann eine Folge $(y_1, \ldots, y_l)$ von normalverteilten Pseudozufallszahlen mit Varianz 1 und Erwartungswert 0 erzeugt.

$$(x_{2\cdot j-1}, x_{2\cdot j}) \;\mapsto\; (y_{2\cdot j-1}, y_{2\cdot j})$$

Die C-Funktion `gasdev` aus [NR92], die diesen Trick benutzt, wurde daher für die Erzeugung von Gaußrauschen benutzt.

## 1.4 Das Problem der sprungerhaltenden Glättung

Wie schon zu Anfang von Abschnitt 1.3 erwähnt, ist die Elimination oder Reduktion von Störungen eine wichtige Aufgabe der Signalverarbeitung. Wir betrachten hier nur den Fall additiver Störungen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns in den folgenden Ausführungen auf additives Rauschen in kartesischen Koordinaten gemäß Definition 1.26 und Definition 1.27.

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ das ungestörte Signal. Man geht davon aus, daß man statt $f$ nur einige Realisierungen eines verrauschten Signals

$$F \;=\; f + S$$

kennt, das aus $f$ durch die Addition von ZV $(S_t)_{t\in D}$ mit Erwartungswert 0 hervorgeht. Aus diesen Realisierungen von $F$ versucht man das unbekannte Signal $f$ zu rekonstruieren.

Aufgrund des stochastischen Charakters der Problemstellung ist klar, daß man bei diesem Versuch höchstens mit einer gewissen Fehlerwahrscheinlichkeit eine gute Rekonstruktion von $f$ erhält. Wir erläutern zwei für Anwendungen relevante Extremfälle.

### 1.4.1 Viele Realisierungen

Man kennt sehr viele Realisierungen des verrauschten Signales $F$. Diese Situation tritt zum Beispiel ein, wenn verschiedene Meßdaten eines Experimentes, das sich beliebig oft unter denselben Bedingungen wiederholen ließ, verarbeitet werden. Man hat somit für jedes $t \in D$ sehr viele unabhängige Stichproben $\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t), \ldots$ von $F(t) = f(t) + S_t$. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert für jedes $t$ ihr arithmetischer Mittelwert

$$\frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} \tilde{f}_j(t)$$

für $k \to \infty$ fast sicher gegen $f(t)$. Das arithmetische Mittel ist ein konsistenter Schätzer für $f(t)$.

### 1.4.2 Eine Realisierung

Man kennt nur eine Realisierung des verrauschten Signales $F$. Diese Situation liegt unter anderem dann vor, wenn man physikalische Größen während eines einmaligen, nicht identisch reproduzierbaren Ereignisses mißt, zum Beispiel die seismographischen Schwingungen nach einem Erdbeben oder die Grauwerte der Bildpunkte in einer bewegten Kamera.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, aus einer einzigen Realisierung $\tilde{f}$ des verrauschten Signals $F = f + S$ das unverrauschte Signal zu rekonstruieren. Sind die Störterme z.B. unabhängig und normalverteilt, so kann unabhängig von $f$ jedes beliebige Signal als Realisierung von $F$ vorkommen.

Als Ausweg ersetzt man in vielen Anwendungen die Rekonstruktionsaufgabe durch folgende Konstruktionsaufgabe: Man hat anwendungsspezifisches Vorwissen über die gemeinsame Verteilung der Störterme $S_t$ und über die Gestalt der möglichen ungestörten Signale und sucht dann in dieser eingeschränkten Klasse von ungestörten Signalen ein Signal $f$ so aus, daß das Auftreten von $\tilde{f}$ als Realisierung von $f + S$ möglichst plausibel ist. Die Plausibilität wird häufig durch ein Funktional ausgedrückt, daß die Unähnlichkeit von $f$ und $\tilde{f}$ beschreibt und deshalb auf der Klasse der zulässigen Signale minimiert werden soll.

Als Beispiel betrachten wir den einfachen Fall, daß die zulässigen ungestörten Signale konstant und die Störterme $S_t$ unabhängig und identisch verteilt sind. Als Funktional, das die Unähnlichkeit von $\tilde{f}$ und $f$ beschreibt, wählt man den $\mathsf{L}^2$–Abstand

$$||f - \tilde{f}||_{\mathsf{L}^2}$$

für ein Signal $f$ aus dieser Klasse. Er wird minimal, wenn der konstante Wert von $f$ gleich dem Mittelwert der $\tilde{f}(t)$, $t \in D$ wird. Diese Wahl von $f$ ist auch stochastisch begründbar, denn die $F_t = f(t) + S_t$ haben alle dieselbe Verteilung, und die Werte $\tilde{f}(t)$ für $t \in D$ sind unabhängige Stichproben gemäß dieser Verteilung.

Ähnlich kann man vorgehen, wenn man voraussetzt, daß $f$ nicht unbedingt konstant ist, sondern daß sich die Werte von Stelle zu Stelle nur wenig ändern. Als Schätzwert für $f(t_0)$ wählt man dann den Mittelwert von $\tilde{f}$ über eine kleine Umgebung von $t_0$.

In vielen Anwendungen muß man jedoch davon ausgehen, daß das ungestörte Signal $f$ an einigen Stellen große Wertänderungen, sogenannte Sprünge, hat, während es ansonsten nur langsam variiert. So gibt es in Bildern oft Stellen, an denen sich die Helligkeit oder Farbe abrupt ändern. Solche Stellen nennt man Kanten. Häufig rühren sie daher, daß ein Objekt ein anderes teilweise verdeckt. Es handelt sich folglich um echte Unstetigkeiten des kontinuierlichen Bildsignals längs der Silhouette. Auch die Entfernung von Objektpunkten, die man zum Beispiel mit Radar oder Stereoverfahren mißt, ändern sich an Silhouetten sprunghaft.

Die Schätzung solcher Signale mit Sprüngen durch lokale Mittelung führt zu keinem befriedigenden Ergebnis, weil in der Nähe der Sprungstellen zwangsläufig größere Fehler auftreten: Die Sprünge werden verschmiert. Dies kann man ein wenig verbessern, indem man geeignet gewichtete Mittelwerte nimmt, zum Beispiel den Ausgang $G_\eta^{\mathrm{LIN}}(\tilde{f})$ eines linearen Gaußfilters als Schätzung von $f$ wählt. Mit linearen Gaußfiltern läßt sich jedoch eine Verschmierung der Sprünge prinzipiell nicht verhindern (siehe dazu auch Abschnitt 2.2.2). Man muß nichtlineare Verfahren einsetzen, die auch die Sprungstellen schätzen.

## 1.5 Sprungerhaltende Glättung

Die Aufgabe der sprungerhaltenden Glättung besteht, grob gesagt, darin, in der Realisierung eines verrauschten Signals die Störungen zu reduzieren, ohne die Sprungstellen zu verschmieren. Wie oben schon erwähnt, ist eine völlige Elimination der Störungen, also eine Rekonstruktion des ungestörten Signals, nicht immer möglich, wenn die Störungen als Realisierungen von unabhängigem normalverteiltem Rauschen modelliert werden.

Es gibt etliche sprungerhaltende Glättungsverfahren, die zum Teil auf völlig unterschiedlichen Ansätzen basieren (z.B [BZ87], [PM90], [SMCM91], [GG], [AuWeu96]). Die von ihnen gelösten Aufgaben unterscheiden sich in der Formulierung und sind nicht ohne weiteres vergleichbar. Allen gemeinsam ist, daß sie ausgehend von der Realisierung $\tilde{f}$ eines verrauschten Signales $F = f + S$, das aus einem langsam variierendem Signal $f$ mit Sprungstellen entsteht, ein zu $f$ recht ähnliches Signal rekonstruieren, falls die Sprungstellen nicht zu eng benachbart sind und die Sprunghöhe deutlich größer als die Störterme sind. Einige Verfahren liefern explizit die Sprungstellen, bei anderen muß man sie erst durch einen anschließenden Verarbeitungsschritt detektieren.

Es gibt keine allgemein verbindliche Definition des Begriffes *Sprungstelle eines diskreten Signals*, er wird implizit durch das jeweilige Verfahren definiert und somit durch die Wahl der Parameter des Verfahrens der jeweiligen Anwendung angepaßt.

# Kapitel 2

# Die Glättung reeller, langsam variierender Signale mit Sprüngen

In diesem Kapitel wird die Glättungswirkung des linearen und des nichtlinearen Gaußfilters untersucht. Das lineare Gaußfilter verschmiert Sprünge, wohingegen es das nichtlineare Gaußfilter erlaubt, eine Sprunghöhe vorzugeben, ab der Sprünge nicht verschmiert werden. Es wird eine Strategie entwickelt und begründet, wie bei einer Iteration von nichtlinaeren Gaußfilterschritten die Parameter zu wählen sind.

## 2.1 Das diskrete, lineare Gaußfilter

Das lineare Gaußfilter glättet durch eine gewichtete Mittelung. Je mehr Werte in die Mittelung eingehen, um so geglätteter erscheint das Ergebnis.

### 2.1.1 Verminderung der Rauschvarianz

**Definition und Satz 2.1** *Seien* $t_0 \in \mathbb{Z}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\eta, \sigma_{\text{RAUSCH}} \in \mathbb{R}^+$. *Sei* $r \in \mathbb{R}$ *mit* $r \geq 3\eta$. *Seien* $(X_t)_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)}$ *unabhängige, identisch verteilte reellwertige ZV mit Erwartungswert* $\mu$ *und Varianz* $\eta^2_{rausch}$. *Sei die Zufallsvariable* $F^{\text{LIN}}$ *definiert durch*

$$F^{\text{LIN}} \quad := \quad \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot X_t$$

*mit* $M := \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)} g_\eta(\|t - t_0\|)$. *Dann ist* $F^{\text{LIN}}$ *eine ZV mit Erwartungswert* $\mu$ *und*

$$\sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \;\approx\; \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\eta)^{\frac{n}{2}}}$$

Beweis von Satz 2.1: $E(F^{\text{LIN}}) = \mu$ ist klar. Ist $r \geq 3\eta$, so nähern wir die Riemannsche Summe $M$ durch das Integral an:

$$M \;=\; \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0, r)} g_\eta(t) \;\approx\; \int_{\mathbb{Z}^n} g_\eta(t)\ \mathrm{dt} \;=\; \left(\sqrt{2\pi}\eta\right)^n$$

Dann gilt wegen $\mathrm{var}(a \cdot F^{\text{LIN}}) = a^2 \cdot \mathrm{var}(F^{\text{LIN}})$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $\mathrm{var}(X_t) = \eta^2_{rausch}$ für alle $t$ und wegen der Unkorreliertheit der $X_t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(F^{\text{LIN}}) &= \mathrm{var}\left(\frac{1}{M} \cdot \sum g_\eta(t) \cdot X_t\right) \\
&= \frac{1}{M^2} \cdot \sum g^2_\eta(t) \cdot \eta^2_{rausch} \\
&\overset{Bem.1.9}{=} \frac{1}{M^2} \cdot \sum g_{\frac{\eta}{\sqrt{2}}}(t) \cdot \eta^2_{rausch} \\
&\approx \frac{\eta^2_{rausch}}{(\sqrt{2\pi}\eta)^{2n}} \cdot \frac{(\sqrt{2\pi}\eta)^n}{\sqrt{2}^n} \\
&= \eta^2_{rausch} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\eta)^n}
\end{aligned}$$

**Definition und Satz 2.2** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $L_n \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch*

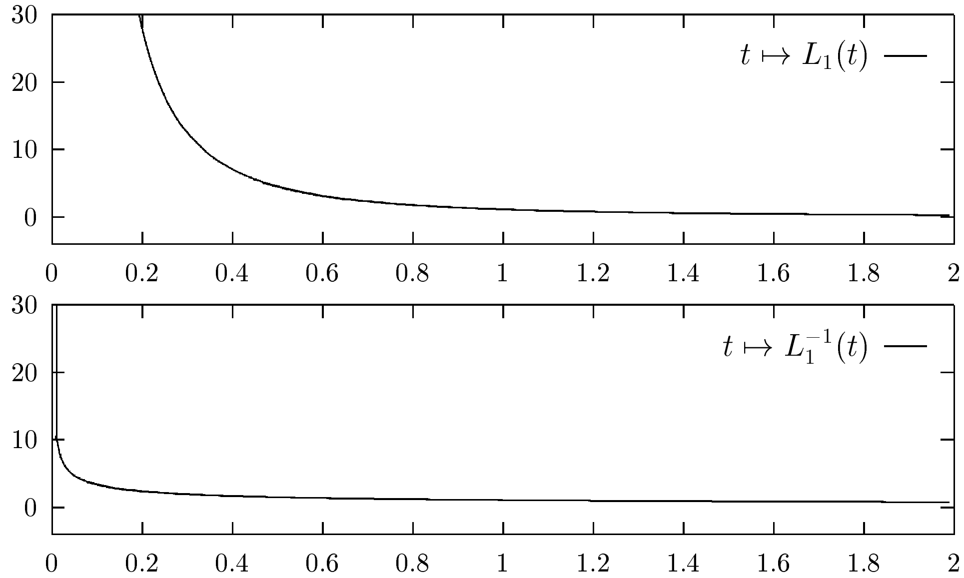
$$L_n(\eta) \;:=\; \frac{2}{(2\sqrt{\pi}\eta)^{\frac{n}{2}}}$$

*Sei $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für alle $\eta \in \mathbb{R}^+$:*

$$L_n(\eta \cdot \lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} \cdot L_n(\eta)$$

*$L_n$ fällt streng monoton. Die Umkehrabbildung ist auf $\mathbb{R}^+$ gegeben durch:*

$$L_n^{-1}(t) \;=\; \frac{\sqrt[n]{4}}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[n]{t^2}}$$




**Satz 2.3** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt:*

$$\sqrt{\mathrm{var}(F^{\text{LIN}})} \;\approx\; \frac{1}{2} \cdot L_n(\eta) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

**Bemerkung 2.4** *Läßt man bei der Definition von $F^{\text{LIN}}$ in Satz 2.1 die Stelle $t_0$ variieren, so erhält man eine Menge von Zufallsvariablen $\{F_t^{\text{LIN}}\}$. Nach Satz 2.1 sind die $F_t^{\text{LIN}}$ identisch verteilt mit Erwartungswert $\mu$ und*

$$\textit{Standardabweichung} \;\approx\; \tfrac{1}{2} L_n(\eta) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

*Die $F_t^{\text{LIN}}$ sind abhängig verteilt. Es gilt: Sind die $X_t$ normalverteilt, so auch die $F_t^{\text{LIN}}$ (siehe z.B. [Rich66], Seite 367).*

### Definition 2.5 2.1.2 Abschätzung der Konfidenzintervalllänge

*Ist $F$ ein Schätzer für den Erwartungswert $\mu$ der Zufallsvariablen $X$, so sei die* **Konfidenzintervalllänge** *$L$ zu einem* **Konfidenzniveau** *$\gamma \in (0,1)$ die Länge des kleinsten Zufallsintervalls*

$$[F - \tfrac{L}{2}; F + \tfrac{L}{2}]$$

*das mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma$ den unbekannten Parameter $\mu$ enthält.*

**Lemma 2.6** *Seien $r \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in \mathbb{N}$. Seien $(X_t)$ für $t \in \mathbb{B}(t_0, r)$ unabhängige identisch verteilte ZV mit Erwartungswert $\mu$, Varianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$ und Verteilungsfunktion $\phi$. Sei $\eta \in \mathbb{R}^+$ und*

$$F^{\text{LIN}} \;=\; \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0, r)} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot X_t$$

*Dann gilt für die Konfidenzintervalllänge $L$ von $F^{\text{LIN}}$ zum Niveau $\gamma \in \mathbb{R}^+$*

$$L \;\approx\; 2\sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

*und $\text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ ist das $\frac{1+\gamma}{2}$–Quantil der Verteilungsfunktion $\phi$.*

Beweis von Lemma 2.6: Die Zufallsvariable

$$\frac{1}{\sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})}} \cdot (F^{\text{LIN}} - \mu)$$

hat Erwartungswert 0 und Varianz 1. Dann gibt es zu $\gamma \in \mathbb{R}$ ein $\text{z} \in \mathbb{R}$, so daß die Wahrscheinlichkeit von

$$-\text{z} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})}} \cdot (F^{\text{LIN}} - \mu) \;\leq\; \text{z}$$

gleich $\gamma$ ist, d.h es gilt:

$$\phi(z) \;=\; \frac{1+\gamma}{2}$$

z hängt von $\gamma$ ab und wird auch mit $\text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ bezeichnet und $\frac{1+\gamma}{2}$–Quantil von $\phi$ genannt. Die obige Ungleichung läßt sich umformen zu

$$F^{\text{LIN}} - \sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}} \;\leq\; \mu \;\leq\; F^{\text{LIN}} + \sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

Und es folgt somit, daß das Zufallsintervall

$$[F^{\text{LIN}} - \sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}; F^{\text{LIN}} + \sqrt{\text{var}(F^{\text{LIN}})} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}]$$

mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma$ den unbekannten Parameter $\mu$ enthält.

Aus Bemerkung 2.3 und Lemma 2.6 erhalten wir eine Abschätzung für die Länge des Konfidenzintervalls von $F^{\text{LIN}}$:

**Satz 2.7** *Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{B}(t_0,r)}$ unabhängige, identisch verteilte reellwertige ZV mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$. Sei $F^{\text{LIN}}$ wie in Satz 2.1 definiert mit $r \geq 3\eta$. Dann gilt für die Länge des Konfidenzintervalls von $F^{\text{LIN}}$ zu gegebenem Konfidenzniveau $\gamma \in \mathbb{R}^+$:*

$$L \;\leq\; L_n(\eta) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot \text{z}_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

Sind die $X_t$ unabhängige, identisch normalverteilte ZV mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$, so erhält man durch Nachschlagen der Quantile: Ist $\text{z}_q = 2$, so ist $q \geq 0.98$, somit $\gamma = 2q - 1 \geq 0.96$. Ist $\text{z}_q = 4$, so ist $q \geq 0.9999$, und es folgt $\gamma \geq 0.9998$. Wir erhalten damit als Spezialfall zu Satz 2.7 folgende Abschätzungen für die Konfidenzintervalllänge:

**Spezialfall 2.8 ($X_t$ normalverteilt)**
*Seien die $X_t$ unabhängige, identisch normalverteilte ZV mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$. Mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma \geq 0.96$ ist*

$$L \;\leq\; 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot L_n(\eta)$$

*und mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma \geq 0.9998$ ist*

$$L \;\leq\; 4 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot L_n(\eta)$$

### 2.1.3 Das lineare Gaußfilter als Schätzer

Seien $\eta, \sigma_{\text{RAUSCH}} \in \mathbb{R}^+$ und $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ ein Signal. Sei $t_0 \in \mathbb{Z}^n$, so daß $f|_{\mathbb{B}(t_0,3\eta)}$ konstant ist. $\tilde{f}$ entstehe aus $f$ durch Addition von $N(0; {\sigma_{\text{RAUSCH}}}^2)$-verteilten Störtermen.

Nach Spezialfall 2.8 gilt:
Mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma \geq 0.96$ liegt $f(t_0)$ im Intervall

$$[G_\eta^{\text{LIN}} \tilde{f}(t_0) - \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot L_n(\eta) \;,\; G_\eta^{\text{LIN}} \tilde{f}(t_0) + \sigma_{\text{RAUSCH}} \cdot L_n(\eta)]$$

Daraus folgt eine Abschätzung für die maximale Abweichung vom Filterergebnis des diskreten linearen Gaußfilters an einer Stelle $t_0$ zum unverrauschten Signalwert:

**(E) 2.9** *Mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0.96$ gilt:*

$$\|G_\eta^{\text{LIN}} \tilde{f}(t_0) \;-\; f(t_0)\| \;\leq\; L_n(\eta) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

Und es gilt, daß $f(t_0)$ mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0.96$ im Intervall

$$[\tilde{f}(t_0) - \sigma_{\text{RAUSCH}}, \tilde{f}(t_0) + \sigma_{\text{RAUSCH}}]$$

liegt. Daraus folgt

**(E) 2.10** *Mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0.96$ gilt:*

$$\|\tilde{f}(t_0) \;-\; f(t_0)\| \;\leq\; 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

## 2.2 Das diskrete, nichtlineare Gaußfilter

Das diskrete nichtlineare Gaußfilter wurde in [Weu94] für Grauwertbilder vorgestellt. Es entsteht aus dem diskreten linearen Gaußfilter durch eine Modifikation, die wie folgt motiviert ist.

Das lineare Gaußfilter glättet, aber es verschmiert Sprünge. Durch die Einführung eines Fensters in Werterichtung wird das Verschmieren von Sprüngen verhindert, wenn die Sprunghöhe größer als die Fenstergröße ist. Statt eines harten Rechteckfilters wird hier eine weiche Gaußgewichtung gewählt.

Sei in diesem Abschnitt $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{Z}^n$ eine endliche Teilmenge. Für alle $t_0 \in D$ sei $U(t_0)$ eine Umgebung von $t_0$ in $D$. Sei $\eta^2$ die Ortsvarianz des nichtlinearen Gaußfilters. Als Ortsumgebung bei der nichtlinearen Gaußfilterung eines Signals $f\colon D \to \mathbb{C}$ nehmen wir, wenn nichts anderes gesagt ist, den Quader mit der Kantenlänge

$$2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil + 1$$

mit Mittelpunkt $t_0$ geschnitten mit $D$. Wir lassen für $n = 1$ somit nur $2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil$ Nachbarwerte in die Mittelung an einer Stelle $t_0$ eingehen.

**Definition 2.11** *Seien $\eta, \zeta_{\text{WERT}} \in \mathbb{R}^+$. Das $n$-dimensionale* **diskrete nichtlineare Gaußfilter** *$G_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}$ ist definiert durch*

$$G_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}(f)(t_0) \;:=\; \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|f(t) - f(t_0)|) \cdot f(t)$$

*für alle $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dabei ist $M$ der Normierungsfaktor*

$$M \;:=\; \sum_{t \in D} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|f(t) - f(t_0)|)$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, so berechnet man den nichtlinearen Gaußfilteroutput des Signals, indem der Betrag $|\ .\ |$ durch die Norm $\|\ .\ \|$ im $R^m$ ersetzt wird. In der Praxis wird wie beim diskreten linearen Gaußfilter über einen endlichen Bereich $U(t_0)$ summiert. Man erhält einen lokal variierenden Normierungsfaktor

$$M(t_0) \;:=\; \sum_{t \in U(t_0) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|)$$

### 2.2.1 Die Kopplung

**Definition 2.12** *Die Abschneidekoffizienten beim nichtlinearen Gaußfilter mit der Ortsvarianz $\eta$ und der Wertevarianz $\zeta_{\text{WERT}}$ werden mit $\kappa_{t,t_0}$ bezeichnet und* **Kopplung** *an der Stelle $t$ zur Stelle $t_0$ genannt.*

$$\kappa_{t,t_0} \;:=\; g_\eta(\|t - t_0\|) \;\cdot\; g_{\zeta_{\text{WERT}}}(\|f(t) - f(t_0)\|)$$

Die Kopplung $\kappa_{t,t_0}$ ist um so größer, je näher $t$ bei $t_0$ liegt und je näher der Wert $f(t)$ bei $f(t_0)$ liegt. Ist die Kopplung groß (also nahe bei 1), sagen wir auch, daß das Filter gut koppelt. Je besser das Filter koppelt, um so stärker ist die durch das Filter erzielte Glättungswirkung.

Für eindimensionale Signale kann aus Einbrüchen in der Kopplung, die eine charakteristische Gestalt haben, auf einen Signalsprung geschlossen werden. Dazu unterscheiden wir die Kopplung nach links und rechts.

**Definition 2.13** *Wir unterscheiden für $n = 1$ die* **Kopplung** *an einer Stelle $t$ nach* **links** *und nach* **rechts***:*

$$\kappa_t^{\leftarrow} := \sum_{s \in U(t),\ s>t} \kappa_{s,t} \qquad \kappa_t^{\rightarrow} := \sum_{s \in U(t),\ s<t} \kappa_{s,t}$$

Wir untersuchen im folgenden die Kopplung des nichtlinearen Gaußfilters für ein unverrauschtes Signal $f\colon [\![1,l]\!] \to \mathbb{R}$ mit einem Sprung an der Stelle $t_0 \in [\![1,l]\!]$.

$$f(t) = \begin{cases} c_1 & \text{falls } t \in [\![1,t_0]\!] \\ c_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Für $c_1 = c_2$ ist unabhängig von der Parameterwahl das Ergebnis eines nichtlinearen Gaußfilters wieder $f$.

Sei $|c_2 - c_1| > 0$. Seien $\zeta_{\text{WERT}}, \eta \in \mathbb{R}^+$. Gilt $\zeta_{\text{WERT}} \leq \frac{|c_2-c_1|}{2}$, so wird der Sprung durch ein nichtlineares Gaußfilter mit den Varianzen $\zeta^2_{\text{WERT}}$ und $\eta^2$ abgeschnitten. Die Abweichung eines Wertes rechts von der Sprungstelle zu einem links von der Sprungstelle wird mit

$$g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|c_2 - c_1|) \leq \exp\left(-\frac{4}{2}\right) =: \epsilon \leq 0.136$$

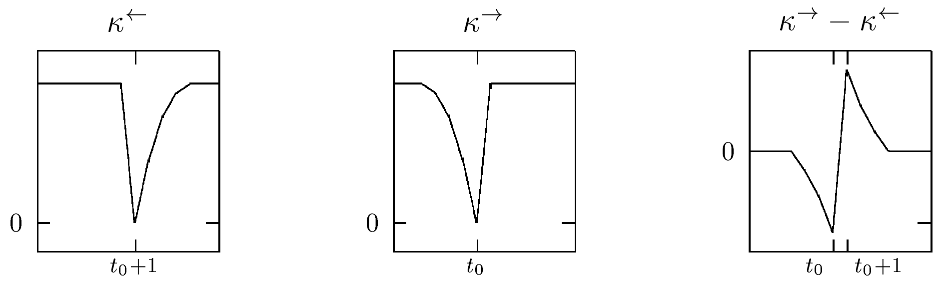
gewichtet, daher wird das Filterergebnis nur in der Nähe der Sprungstelle ein wenig von $f$ abweichen. Je mehr jedoch $\zeta_{\text{WERT}}$ von $\frac{|c_2-c_1|}{2}$ nach oben abweicht, um so mehr wird der Sprung durch das nichtlineare Gaußfilter verschmiert.

Sei im folgenden $\zeta_{\text{WERT}} \leq \frac{|c_2-c_1|}{2}$. Es gilt:

$$\kappa_{t,t_0} = g_\eta(|t - t_0|) \cdot \begin{cases} \epsilon & t < t_0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

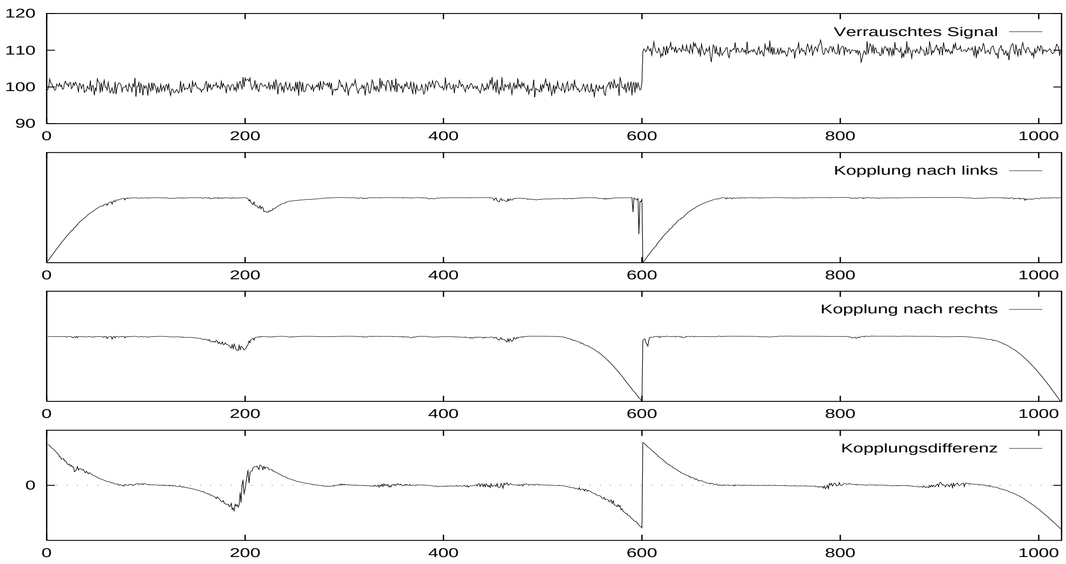
Sei $U(t_0) = [\![t_0 - r, t_0 + r]\!]$ die Umgebung, über die beim nichtlinearen Gaußfilter gemittelt wird. Es gelte $t_0 \in [\![r, l - r]\!]$.

- Die Kopplung $\kappa_t^{\leftarrow}$ ist nahezu konstant $\approx \sum_{l=1}^{r} g_\eta(l)$ für alle $t$ mit $t \in [\![t_0 - r, t_0]\!]$.
- An der Stelle $t_0 + 1$ hat $\kappa^{\leftarrow}$ ein Minimum; es gilt $\kappa_{t_0+1}^{\leftarrow} = \epsilon \cdot g_\eta(1) \leq \epsilon$.
- Für $t$ mit $t \in [\![t_0 + 1, t_0 + r]\!]$ beginnt $\kappa^{\leftarrow}$ wieder anzusteigen, bis an der Stelle $t_0 + r$ wieder das Maximum erreicht ist.




Analog dazu nimmt $\kappa^{\rightarrow}$ ab, wenn man sich der Sprungstelle von links nähert. An der Stelle $t_0$ nimmt sie ihr Minimum an. Bei $t = t_0 + 1$ ist $\kappa_{t_0}^{\rightarrow}$ wieder maximal. Die Differenz der Kopplungen $(\kappa^{\rightarrow} - \kappa^{\leftarrow})$ markiert die Sprungstelle durch einen Nulldurchgang. Sie bietet sich daher für die Detektion von Sprüngen an, wenn das Rauschen hinreichend reduziert ist.

**Beispiel 2.14**
*Hier ist $\eta = 40$ und die Ortsumgebungsgröße gleich 160. Das Signal ist nur leicht verrauscht. Es hat einen Sprung an der Stelle 600. Abgebildet ist die Kopplung eines nichtlinearen Filterschrittes. Nulldurchgänge der Kopplungsdifferenz werden an der Stelle 200 und 600 markiert. Die Einbrüche in der Kopplung im Bereich der Stelle 200 werden durch einen lokalen An- und Abstieg im Signal hervorgerufen.*



**Ein nichtlineares Differenzenfilter zur Detektion von Sprüngen aus der Kopplung**

Ist die Varianz $\zeta_{\text{WERT}}$ für die Gaußglocke, die die Abweichung in Werterichtung gewichtet, so gewählt, daß ein Signalsprung der Höhe $H$ abgeschnitten wird,

$$H \quad \geq \quad 2 \cdot \zeta_{\text{WERT}}$$

so sind charakteristische Einbrüche in der Kopplung zu sehen, wenn die Varianz des Rauschend genügend klein ist. Wie bereits oben erwähnt, bieten sich die Nulldurchgänge der Differenz der Kopplungen $(\kappa^{\rightarrow} - \kappa^{\leftarrow})$ an, um auf einfache Weise die Sprungstellen zu markieren. Um zu verhindern, daß geringe Einbrüche wie in Beispiel 2.14 an der Stelle 200 in der Kopplung als Sprungstellen markiert werden, führen wir eine harte Entscheidung ein.

Durch das Vorgeben einer Schranke legen wir fest, ab welcher Tiefe ein Einbruch in der Kopplung als Sprungstelle markiert wird.

**Definition 2.15** *Sei $\tau \in \mathbb{R}^+$. Dann sei das nichtlineare* **Differenzenfilter** $DF_\tau$ *der Kopplungen $\kappa^{\rightarrow}$ und $\kappa^{\leftarrow}$ wie folgt definiert:*

$$DF_\tau(t) \quad := \begin{cases} \kappa^{\rightarrow}(t) - \kappa^{\leftarrow}(t) & \textit{falls} \;\; \kappa^{\rightarrow}(t) < \tau \;\; \textit{und} \;\; \kappa^{\leftarrow}(t) < \tau \\ 0 & \qquad \textit{sonst} \end{cases}$$

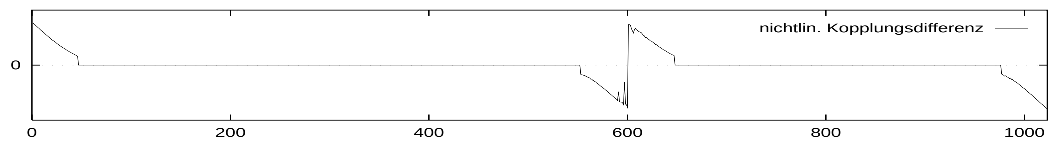
In der Praxis hat sich die folgende Wahl der Schranke $\tau$ bewährt. Sei $\eta^2$ die Ortsvarianz des nichtlinearen Gaußfilters. Sei $t_0 \in [\![1, l]\!]$ so, daß die Umgebung $U(t_0)$, über die gemittelt wird, ganz in $[\![1, l]\!]$ liegt. Setze $M_\kappa := \sum_{t \in U(t_0), t < t_0} g_\eta(|t - t_0|)$. Dann ist $\kappa^{\leftarrow} \leq M_\kappa$ und $\kappa^{\rightarrow} \leq M_\kappa$, und wir setzen

$$\tau \quad := \quad \frac{2}{3} \cdot M_\kappa$$

Mit dieser Wahl der Schranke $\tau$ markieren wir im folgenden stets Sprungstellen. Den Ausgang des auf diese Weise definierten nichtlinearen Differenzenfilters bezeichnen wir abkürzend mit *Kopplungsdifferenz.*

**Beispiel 2.16 (Der Ausgang des nichtlin. Differenzenfilters von Bsp. 2.14)**

*Wir erhalten als Ausgang des nichtlinearen Differenzenfilters für das obige Beispiel eine markierte Sprungstelle an der Stelle 600.*



### 2.2.2 Die Wirkung auf stückweise konstante Signale

Durch den zusätzlichen Gewichtsfaktor $g_{\zeta_{\text{WERT}}}(f(t) - f(t_0))$ wird die Verschmierung eines Sprunges um so mehr verhindert, je kleiner $\zeta_{\text{WERT}}$ gegenüber der Sprunghöhe $H$ ist. Wie bereits ausgeführt wurde, ist in der Praxis für $\zeta_{\text{WERT}} \leq \frac{1}{2} \cdot H$ die Verschmierung vernachlässigbar klein. Ist diese Bedingung für alle Sprünge des Signals erfüllt, so ist das Ausgangssignal des Filters nahezu identisch mit dem Eingangssignal. In [Weu94, Kor. 3.2] wird gezeigt, daß es eine Schranke $C$ gibt, so daß die Ungleichung

$$|G_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}(f)(t) \; - \; f(t)| \;\; \leq \;\; C$$

für jedes $f$ und jedes $t$ aus dem Definitionsbereich gilt. Für das lineare Gaußfilter gibt es keine derartige Abschätzung. Das nichtlineare Gaußfilter läßt sich in naheliegender Weise auch für kontinuierliche Signale definieren. In [Weu94, Bem. 4.31] wird gezeigt, daß das Ausgangssignal des kontinuierlichen nichtlinearen Gaußfilters in den Sprungstellen des Eingangssignals auch unstetig ist, ganz im Gegensatz zu dem Ausgangssignals eines kontinuierlichen linearen Gaußfilters, das sogar beliebig oft differenzierbar ist.

### 2.2.3 Die Wirkung auf verrauschte, konstante Signale

Wir untersuchen die Wirkung eines nichtlinearen Gaußfilters auf ein verrauschtes, konstantes Signal im Mittel über viele Realisierungen.

**Definition 2.17** *Seien $t_0 \in \mathbb{Z}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\eta, \zeta_{\text{WERT}} \in \mathbb{R}^+$. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 3\eta$. Seien $(X_t)_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)}$ ZV mit Erwartungswert $\mu$.*

$$F^{\text{NLIN}} \quad := \quad \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|X_t - X_{t_0}|) \cdot X_t$$

*mit*

$$M \;\; = \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|X_t - X_{t_0}|)$$

**Lemma 2.18** *Sind die $X_t$ unabhängig, identisch verteilt mit einer Dichte $\vartheta$ derart, daß $x \mapsto \vartheta(x + \mu)$ gerade ist, so hat $F^{\text{NLIN}}$ denselben Erwartungswert $\mu$ wie die $X_t$.*

Beweis: [Weu94, Lemma 4.12]

Wir nehmen die Wirkung des linearen Gaußfilters mit derselben Ortsvarianz als Vergleichsmaßstab. Es sei wie in Satz 2.1

$$F^{\text{LIN}} \quad := \quad \frac{1}{M} \cdot \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot X_t$$

mit $M := \sum_{t \in \mathbb{B}(t_0,r)} g_\eta(\|t-t_0\|)$. Die Differenz $|F^{\text{NLIN}} - F^{\text{LIN}}|$ ist mit hoher Wahrscheinlichkeit klein, wenn es sehr unwahrscheinlich ist, daß eine der Differenzen $|X_t - X_{t_0}|$ groß ist. Wir nehmen im folgenden an, daß jedes $X_t$ $N(\mu; \sigma^2_{\text{RAUSCH}})$–verteilt ist, und betrachten zwei Spezialfälle, die für den nächsten Abschnitt von Bedeutung sind.

**1. Fall: Die $X_t$ sind unabhängig**
Dann ist jede Differenz $(X_t - X_{t_0})$ $N(0; 2 \cdot \sigma^2_{\text{RAUSCH}})$–verteilt. Da das 0.980-Quantil der $N(0;1)$–Verteilung circa 2 ist, liegen in dem Intervall

$$[-2\sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}\ ,\ +2\sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}]$$

etwa 96 % der Masse der Verteilung von $(X_t - X_{t_0})$. Für kleinen Radius $r$ ist somit die Wahrscheinlichkeit recht hoch, daß keine der Differenzen $|X_t - X_{t_0}|$ größer als $+2\sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ ist. Überdies wird in einem nichtlinearen Gaußfilter mit $g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|X_t - X_{t_0}|)$ eine *weiche* statt einer *harten* Entscheidung getroffen, welche $X_t$ bei der Mittelung eingehen.

Deshalb gilt: Wählt man $\zeta_{\text{WERT}} \approx 2\sqrt{2} \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$, so weichen die Resultate des linearen und des nichtlinearen Gaußfilters (beide mit derselben Ortsvarianz) nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit um größere Beträge voneinander ab. In der Praxis hat sich die Wahl $\zeta_{\text{WERT}} = 3 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ gut bewährt.

**2. Fall: Die $X_t$ sind die Ausgangs-ZV eines linearen Gaußfilters** mit Ortsvarianz $\xi^2 \geq 1$, das mit unabhängigen, identisch normalverteilten Variablen $Y_t$ gespeist wird; es gilt also $X_t = G^{\text{LIN}}_\xi(Y)(t)$. Dann sind die $X_t$ abhängig. Ihre gemeinsame Verteilung ist wieder eine Normalverteilung, die aber nicht isotrop ist.

Die gemeinsame Verteilung von zwei ZV $X_t$ und $X_s$ konzentriert sich um so mehr um die Diagonale, je näher $t$ und $s$ benachbart sind; $X_t$ und $X_s$ haben also mit hoher Wahrscheinlichkeit ähnliche Werte, wenn $t$ und $s$ benachbart sind. Deshalb kann man $\zeta_{\text{WERT}}$ kleiner als im ersten Fall wählen, ohne die Wahrscheinlichkeit für eine größere Abweichung von $F^{\text{LIN}}$ und $F^{\text{NLIN}}$ nennenswert zu erhöhen. In der Praxis hat sich $\zeta_{\text{WERT}} = 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ als gute Wahl erwiesen.

### 2.2.4 Die Wirkung auf einzelne Realisierungen verrauschter, langsam variierender Signale

Verrauscht man ein langsam variierendes Signal mit Sprüngen durch weißes, normalverteiltes Rauschen, so kann jedes beliebige Signal als Realisierung auftreten. Daher ist es nicht möglich, mit einem nichtlinearen Gaußfilter stets eine vernünftige Schätzung des ursprünglichen, unverrauschten Signales zu erhalten. Man kann lediglich hoffen, daß im Falle nicht zu großer Störterme ein nichtlineares Gaußfilter mit geeigneten Parameterwerten $\eta$ und $\zeta_{\text{WERT}}$ die Störterme reduziert und die Sprünge erhält oder deutlich hervortreten läßt.

Dabei spielt zunächst $\zeta_{\text{WERT}}$ die bedeutendere Rolle. Denn durch $\zeta_{\text{WERT}}$ wird die Größenordnung der Differenz festgelegt, ab der der Einfluß von $f(t)$ in der Mittelwertbildung deutlich abnimmt. Den Wert $g_{\zeta_{\text{WERT}}}(|f(t)-f(t_0)|)$ kann man als subjektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwischen $t$ und $t_0$ keine Sprungstelle ist, interpretieren. Durch die Wahl von $\zeta_{\text{WERT}}$ legt man somit völlig willkürlich fest, welche Wertedifferenzen $|f(t)-f(t_0)|$ man eher als Störungen oder als Sprünge ansieht.

Hat man ein Vorwissen über die Varianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$ des Rauschens, so wird man nach Abschnitt 2.2.3 $\zeta_{\text{WERT}} \geq 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ (oder $\zeta_{\text{WERT}} \geq 3 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ ) wählen, weil dann mit hoher Wahrscheinlichkeit die Störterme ähnlich wie durch ein lineares Gaußfilter vermindert werden. Andererseits sollte man nach Abschnitt 2.2.2 $\zeta_{\text{WERT}}$ möglichst klein wählen, um die Sprünge möglichst gut zu erhalten, daher wählen wir meist

$$\zeta_{\text{WERT}} \quad \in \quad [2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}, 3 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}]$$

Dann bleiben nach Abschnitt 2.2.2 Sprünge, deren Höhe $H \geq 2 \cdot \zeta_{\text{WERT}} = 4 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ ist, gut erhalten. Je kleiner das sogenannte Signal–Rausch–Verhältnis $\frac{H}{2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}}$ ist, desto stärker wird der Sprung verschmiert.

## 2.3 Die nichtlineare Gaußfilterkette

Sei $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$ die Varianz des Rauschens, durch das ein Signal gestört ist. Damit ein nichtlineares Gaußfilter mit Ortsvarianz $\eta^2$ und Wertevarianz $\zeta^2_{\text{WERT}}$ eine gute Glättungswirkung erzielt, sollte $\zeta_{\text{WERT}} \geq 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ sein. Dann werden die Störterme um so mehr vermindert, je größer $\eta$ ist. Signalsprünge, deren Höhe $H$ größer als $2 \cdot \zeta_{\text{WERT}}$ ist, werden dabei gut erhalten; Sprünge mit kleinerer Höhe werden jedoch um so mehr verschmiert, je kleiner $H$ und je größer $\eta$ ist.

Diesem Dilemma kann man teilweise entgehen, indem man statt eines einzelnen nichtlinearen Gaußfilters eine Hintereinanderschaltung mehrerer, eine sogenannte nichtlineare Filterkette $G_{\eta_k,\zeta_{\text{WERT},k}} \circ \cdots \circ G_{\eta_1,\zeta_{\text{WERT},1}}$ verwendet. In [Weu94, AuWeu96] wurde experimentell nachgewiesen, daß bei geeigneter Wahl der Parameter mit so einer Kette vielfach auch noch Sprünge, deren Höhe in der Größenordnung von $\sigma_{\text{RAUSCH}}$ liegen, recht gut erhalten werden können, ohne die Glättungswirkung zu verschlechtern.

In [Weu94, AuWeu96] wurde eine Verdoppelungs-Halbierungs-Strategie vorgeschlagen (d.h. $\eta_{j+1} = 2 \cdot \eta_j$ und $\zeta_{\text{WERT},j+1} = \frac{1}{2} \cdot \zeta_{\text{WERT},j}$), die sich für 2-dimensionale Signale (Grauwertbilder) als sehr gut erweist. Wir werden im folgenden eine genauere Plausibilitätserklärung für diese Strategie geben und dabei auch gleich für andere Dimensionen eine Strategie für die Parameterwahl herleiten, die in Experimenten nicht zu verbessern war.

### 2.3.1 Idee des Vorgehens

Sei $\eta \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$. Im kontinuierlichen Fall läßt sich nach Abschnitt 1.1.3 das lineare Gaußfilter $G^{\text{LIN}}_\eta$ als Komposition von $k$ linearen Gaußfiltern mit den Varianzen $\eta_1^2, \ldots, \eta_k^2$ schreiben:

$$G^{\text{LIN}}_\eta \;=\; G^{\text{LIN}}_{\eta_k} \circ \ldots \circ G^{\text{LIN}}_{\eta_1} \quad \text{mit} \quad \eta \;=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \eta_j^2}$$

Im diskreten Fall gehen wir von der rechten Seite aus und ersetzen jede der $k$ Filterstufen durch ein nichtlineares Gaußfilter mit Ortsvarianz $\eta_j^2$ und Wertevarianz $\zeta^2_{\text{WERT},j}$, wobei die Wertevarianzen möglichst klein gewählt werden sollen, aber doch so groß, daß die Rauschvarianz des Eingangssignals durch die nichtlineare Filterkette abseits von Sprüngen nahezu wie durch das lineare Gaußfilter $G_\eta$ vermindert wird.

Der Vorteil gegenüber dem linearen Gaußfilter $G^{\text{LIN}}_{\eta_1}$ besteht darin, daß Sprünge mit einer Höhe $\geq 2 \cdot \zeta_{\text{WERT},j}$ von dem Endstück $G_{\eta_k,\zeta_{\text{WERT},k}} \circ \cdots \circ G_{\eta_j,\zeta_{\text{WERT},j}}$ der Filterkette kaum noch verschmiert werden. Sie werden zwar von dem entsprechenden Anfangsstück der Filterkette eventuell verschmiert, aber höchstens so viel wie durch ein lineares Gaußfilter $G^{\text{LIN}}_{s_j}$ mit Ortsvarianz $s_j^2 = \sum_{m=1}^{j} \eta_m^2$.

**Definition 2.19** *Seien $\eta_1, \ldots \eta_k \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$. Setze:*

$$\begin{array}{lcll} s_j & := & \sqrt{\sum_{m=1}^{j} (\eta_m)^2} & j = 1, \ldots, k \\ \beta_{\text{ORT},j} & := & \frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} & j = 1, \ldots, k-1 \\ \beta_{\text{WERT},j} & := & \frac{\zeta_{\text{WERT},j+1}}{\zeta_{\text{WERT},j}} & j = 1, \ldots, k-1 \end{array}$$

Dann sind die Varianzen $\eta_j$ und $\zeta_{\text{WERT},j}$ für $j = 1, \ldots, k$ durch $\eta_1$, $\zeta_{\text{WERT},1}$ und durch die Koeffizienten $\beta_{\text{ORT},j}$ und $\beta_{\text{WERT},j}$ eindeutig bestimmt.

Im Kontinuierlichen gilt für die lineare Gaußfilterkette $G^{\text{LIN}}_{\eta_j} \circ \ldots \circ G^{\text{LIN}}_{\eta_1} = G^{\text{LIN}}_{s_j}$, im Diskreten gilt diese Gleichung zwar nicht exakt, aber man kann davon ausgehen, daß die Filterkette $G^{\text{LIN}}_{\eta_j} \circ \ldots \circ G^{\text{LIN}}_{\eta_1}$ die Standardabweichung von weißem Rauschen ähnlich vermindert wie $G^{\text{LIN}}_{s_j}$, nämlich nach Satz 2.3 um den Faktor $\frac{1}{2} \cdot L_n(s_j)$. Dadurch können wir vermeiden, uns näher mit den Abhängigkeiten der Rauschvarianzen am Ausgang der Filterstufen befassen zu müssen.

Wir setzen im folgenden voraus, daß das Eingangssignal der Filterkette weiß verrauscht ist.

### 2.3.2 Filterketten mit konstantem Faktor $\beta_{\text{WERT},j}$ zur Verminderung der Rauschvarianz

Wir machen den Ansatz, die Wertevarianz bei jedem Filterschritt durch einen fest vorgegebenen Faktor $\alpha$ zu teilen; es gelte also

$$\beta_{\text{WERT},j} = \frac{1}{\alpha}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $j = 1, \ldots, k-1$. Falls die Rauschvarianz $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$ des Eingangssignals bekannt ist, setzt man gemäß Abschnitt 2.2.3 $\zeta_{\text{WERT},1} \approx 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$.

Die Ortsvarianzen müssen so gewählt werden, daß bei der entsprechenden linearen Filterkette am Ausgang der $j$-ten Stufe das Rauschen um den Faktor $\frac{1}{\alpha}$ geringer ist als am Ausgang der $(j-1)$-ten Stufe. Die Verminderung der Rauschvarianz wurde in Bemerkung 2.4 mit Hilfe der Funktion $L_n$ beschrieben. Es muß also gelten:

$$\begin{array}{lcl} L_n(s_1) & = & \frac{1}{\alpha} \\ L_n(s_{j+1}) & = & \frac{1}{\alpha} \cdot L_n(s_j) \end{array}$$

für $j = 1, \ldots, k-1$. Nach Bemerkung 2.2 ist dies äqivalent zu

$$\begin{array}{lcl} s_1 & = & \frac{\sqrt[n]{4\alpha^2}}{2\sqrt{\pi}} \\ s_{j+1} & = & \sqrt[n]{\alpha^2} \cdot s_j \end{array}$$

Und somit folgt

$$
\begin{aligned}
(s_{j+1})^2 &= (s_j)^2 + (\eta_{j+1})^2 \\
&= (s_j)^2 \cdot \sqrt[n]{\alpha^4}
\end{aligned}
$$

Mit $c := \sqrt[n]{\alpha^2}$ folgt daraus

$$
(\eta_{j+1})^2 = (c^2 - 1) \cdot (s_j)^2
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
(\beta_{\text{ORT},j})^2 &= \left(\frac{\eta_{j+1}}{\eta_j}\right)^2 \\
&= \left(\frac{s_j}{s_{j-1}}\right)^2 \\
&= c^2
\end{aligned}
$$

Es folgt $\beta_{\text{ORT},j} = \sqrt[n]{\alpha^2}$ für $j = 1, \dots, k-1$. Die Standardabweichung des Rauschens hat in etwa um den Faktor $L_n(s_k) = \frac{1}{\alpha^k}$ abgenommen.

Geht man davon aus, daß man einen Sprung mit hoher Wahrscheinlichkeit erkennen kann, wenn die Standardabweichung des Rauschens höchstens halb so groß wie die Sprunghöhe ist, so kann man nach $k$ Filterstufen noch Sprünge einer Mindesthöhe $H_{min} = \frac{1}{\alpha^k} \cdot 2\sigma_{\text{RAUSCH}}$ erkennen. Umgekehrt ergibt sich eine Richtlinie für die Wahl von $k$, nämlich

$$
k = \left\lceil \log_\alpha \frac{H_{min}}{2\sigma_{\text{RAUSCH}}} \right\rceil
$$

Wir fassen zusammen:

**Strategie 2.1** *Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Sei $H_{min} \in \mathbb{R}$ die Mindestsprunghöhe, die detektiert werden soll. Sei $\sigma^2_{\text{RAUSCH}}$ die Varianz des weißen Rauschens des Eingangssignals. Dann wähle die Parameter für die nichtlineare Filterkette wie folgt:*

$$
\begin{aligned}
\zeta_{\text{WERT},1} &:= 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} & \qquad \beta_{\text{WERT},j} &:= \frac{1}{\alpha} \\
\eta_1 &:= \frac{\sqrt[n]{4\alpha^2}}{2\sqrt{\pi}} & \qquad \beta_{\text{ORT},j} &:= \sqrt[n]{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

*Für die Länge $k$ der Filterkette wähle*

$$
k := \left\lceil \log_\alpha \left( \frac{H_{min}}{2\sigma_{\text{RAUSCH}}} \right) \right\rceil
$$

*Bei kleinem SNR ist es manchmal günstig, $\zeta_{\text{WERT},1}$ auf $3 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$ zu erhöhen, ohne die Werte der anderen $\zeta_{\text{WERT},j}$ zu verändern.*

**Beispiel 2.20** *Nach Strategie 2.1 werden die Parameter für $\alpha = \sqrt{2}$ und $\alpha = 2$ wie folgt gewählt (kaufmännisch gerundet auf die 2. Nachkommastelle):*

| **1-dimensional** | | | **2-dimensional** | | | **3-dimensional** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\eta_1$ | $\beta_{\text{ORT},j}$ | $\alpha$ | $\eta_1$ | $\beta_{\text{ORT},j}$ | $\alpha$ | $\eta_1$ | $\beta_{\text{ORT},j}$ |
| $\sqrt{2}$ | 2.26 | 2 | $\sqrt{2}$ | 0.80 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 0.56 | 1.26 |
| 2 | 4.51 | 4 | 2 | 1.13 | 2 | 2 | 0.71 | 1.59 |

### 2.3.3 Optimale Filterketten vorgegebener Länge

Seien die Anzahl $k$ der Filterstufen und $L_n(s_k) \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wähle die $\zeta_{\text{WERT},j}$ stets möglichst klein, also wie folgt:

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{WERT},1} &= 2 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \\ \zeta_{\text{WERT},j} &= L_n(s_{j-1}) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \end{aligned}$$

Die $s_j$ bzw. $\eta_j$ sollen für $j = 1, \ldots, k-1$ so gewählt werden, daß bei den Sprüngen möglichst wenig Verschmierung eintritt.

Um ein Optimalitätskriterium für die Wahl der $\eta_j$ formulieren zu können, werden einige Begriffe benötigt. Die Mindestsprunghöhe $H_{min}$, die nach der Filterkette detektiert werden kann, ist gegeben durch

$$H_{min} = 2 \cdot L_n(s_k) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

Durch die Wahl von $L_n(s_k)$ ist somit vorgegeben, für welches Verhältnis

$$R := \frac{|H_{min}|}{2\sigma_{\text{RAUSCH}}}$$

von Sprunghöhe zu Signalrauschen nach der Filterkette Sprünge detektiert werden können. $R$ spielt hier die Rolle eines **Signal–Rausch–Verhältnisses** (Signal–Noise–Ratio), das auch mit SNR abgekürzt wird.

Gibt man sich $R$ vor und setzt $s_k = L_n^{-1}(R)$, so stehen nur noch $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ bzw. $s_1, \ldots, s_{k-1}$ mit $0 < s_1 < \cdots < s_k$ zur Wahl. Wir wollen diese Parameter so wählen, daß Sprünge mit SNR $\geq R$ möglichst wenig verschmiert werden.

**Definition 2.21** *Als Maß für die Verschmierung eines $n$-dimensionalen linearen Gaußfilters mit Varianz $\eta$ wählen wir $\eta^n$.*

Gilt $L_n(s_m) \leq R$, so ist $H_{min} \geq 2 \cdot L_n(s_m) \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} = 2 \cdot \zeta_{\text{WERT},m+1}$, und folglich wird der Sprung durch die $(m+1)$-te und die folgenden Filterstufen kaum noch verschmiert.

**Definition 2.22** *Als Maß für die Verschmierung $V(R)$ eines Signals mit Signal-Rausch-Verhältnis $R$ durch eine nichtlineare Filterkette der Länge $k$ mit den Parametern $\eta_j, \zeta_{\text{WERT},j}$ definiere analog zum linearen Fall*

$$V(R) := (s_j)^n \quad \text{mit} \quad j \;=\; \min\{m \;:\; L_n(s_m) \;\leq R\} \cup \{k\}$$

Dann gilt für die Verschmierung $V$ eines Signals mit SNR $R \in \mathbb{R}^+$ durch eine nichtlineare Filterkette der Länge $k$:

$$V(R) \;=\; \min\left\{j \;:\; (s_j)^n \;\geq\; L_n^{-1}(R)\right\} \cup \{(s_k)^n\}$$

**Bemerkung 2.23** *Wegen $V(R) = (s_j)^n$ für $L_n(s_j) \;\leq\; R \;<\; L_n(s_{j-1})$ ist $V$ eine Treppenfunktion.*

Die nichtlineare Filterkette verschmiert nur Sprünge mit einer Sprunghöhe $H$ mit

$$|H| \;\leq\; 2 \cdot \zeta_{\text{WERT},1} = 4 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}}$$

d.h. Sprünge mit SNR $\leq 2$. Wir setzen stets $s_0 := L_n^{-1}(2)$. Es sind nur Sprünge mit Sprunghöhe $\geq H_{min}$ relevant, somit Sprünge mit einem Signal-Rausch-Verhältnis $\geq L_n(s_k)$.

**Definition 2.24** *Die* **Gesamtverschmierung** $V_{Filterkette}$ *einer Filterkette der Länge $k$ sei definiert als*

$$V_{Filterkette} \;:=\; \int_{L_n(s_k)}^{2} V(R)\;\mathrm{d}R$$

*Eine Filterkette heißt* **optimal***, wenn ihre Gesamtverschmierung minimal ist unter allen Filterketten mit derselben Länge $k$ und demselben $s_k$.*

**Satz 2.25 (Optimalitätskriterium, 1. Fassung)** *Eine Filterkette der Länge $k$ ist genau dann optimal, wenn folgender Ausdruck minimal ist:*

$$\sum_{j=1}^{k} (s_j)^n \cdot \left(L_n(s_{j-1}) - L_n(s_j)\right)$$

Beweis: Da $V$ eine Treppenfunktion ist, gilt:

$$V_{Filterkette} \;=\; \sum_{j=1}^{k} (s_j)^d \cdot \left(L_n(s_{j-1}) - L_n(s_j)\right)$$

**Bemerkung 2.26** $V_{Filterkette}$ *ist eine Riemannsche Obersumme zu*

$$\int_{L_n(s_k)}^{2} \left(L_n^{-1}(R)\right)^n \;\mathrm{d}R$$

Nach Bemerkung 2.2 gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $c_n \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{L_n(s_k)}^{2} \left(L_n^{-1}(R)\right)^n \, \mathrm{d}R \;=\; c_n \cdot \int_{L_n(s_k)}^{2} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

Setzen wir für alle $j = 1, \ldots, k$

$$t_j \;:=\; L_n(s_j)$$

so ist das Problem, die optimalen Werte für die $s_j$ zu finden, äquivalent dazu, eine Fläche zu minimieren:

**Satz 2.27 (Optimalitätskriterium, 2. Fassung)** *Sind $k \in \mathbb{N}$ und $0 < t_k < 2$ gegeben, so wähle $t_j$ für $j = 1, \ldots, k-1$ mit*

$$2 =: t_0 > t_1 > \ldots > t_{k-1} > t_k$$

*so, daß der folgende Ausdruck minimal wird:*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t_j^2} \cdot (t_{j-1} - t_j)$$

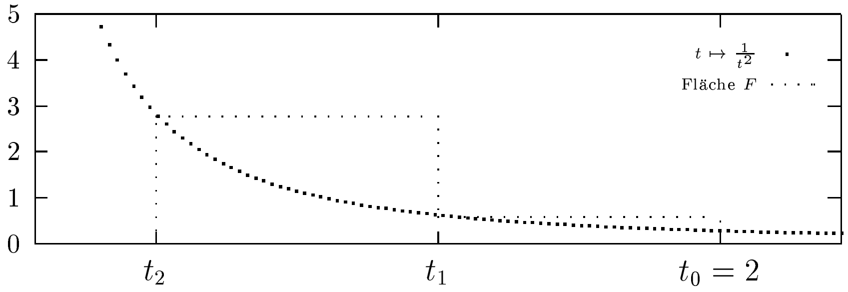
*Dann erfüllen die $s_j := L_n^{-1}(t_j)$ das Optimalitätskriterium 2.25.*

### 2.3.4 Optimale Filterketten der Länge 2

Sei $k = 2$. Wir bestimmen zunächst eine Lösung des Optimalitätskriteriums 2.27 für die Wahl der $t_j$. Dann bestimmen wir daraus die optimale Wahl der Parameter einer Filterkette:

$$G_{\eta_2, \zeta_{\text{WERT},2}} \;\circ\; G_{\eta_1, \zeta_{\text{WERT},1}}$$

Nach dem Optimalitätskriterium 2.27 ist $t_2 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben und $t_0 = 2$. Somit ist nur $t_1 \in [t_2, 2]$ zu bestimmen.



Zu minimieren ist somit die Fläche $F$ mit

$$\begin{aligned} F(t_1) &:= \frac{t_1 - t_2}{t_2^2} + \frac{2 - t_1}{t_1^2} \\ &= \frac{t_1}{t_2^2} - \frac{1}{t_2} + \frac{2}{t_1^2} - \frac{1}{t_1} \\ F'(t_1) &= \frac{1}{t_2^2} - \frac{4}{t_1^3} + \frac{1}{t_1^2} \end{aligned}$$

Die Ableitung von $F$ verschwindet genau dann an der Stelle $t_1$, wenn gilt:

$$t_1^3 + P \cdot t_1 - Q = 0$$

mit $P := t_2^2$ und $Q := 4 \cdot t_2^2$. Da die Diskriminante

$$\begin{aligned} D &:= \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 \\ &= \frac{t_2^6}{27} + 4 \cdot t_2^2 \end{aligned}$$

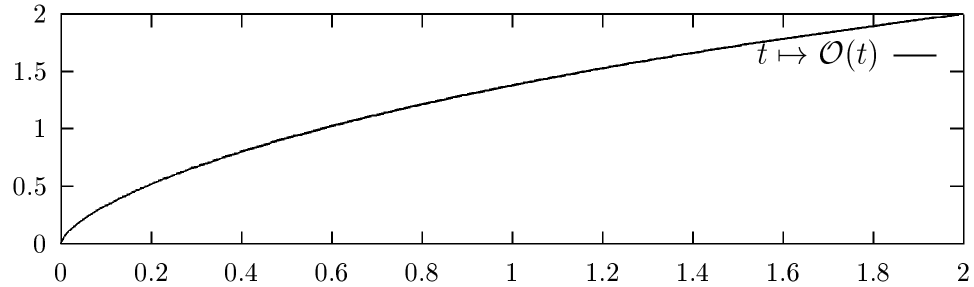
positiv ist, gibt es genau eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen. Die reelle Lösung lautet

$$t_1 = \sqrt[3]{2 \cdot t_2^2 + \sqrt[2]{\frac{t_2^6}{27} + 4 \cdot t_2^2}} + \sqrt[3]{2 \cdot t_2^2 - \sqrt[2]{\frac{t_2^6}{27} + 4 \cdot t_2^2}}$$

**Definition und Satz 2.28** *Sei $\mathcal{O} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\mathcal{O}(t) := \sqrt[3]{2 \cdot t^2 + \sqrt[2]{\frac{t^6}{27} + 4 \cdot t^2}} + \sqrt[3]{2 \cdot t^2 - \sqrt[2]{\frac{t^6}{27} + 4 \cdot t^2}}$$

*Sei $t_2 \in ]0, 2[$. Dann erfüllt $t_1 = \mathcal{O}(t_2)$ das Optimalitätskriterium 2.27 für $k = 2$.*



**Satz 2.29** *Seien $H_{min}, \sigma_{\text{RAUSCH}} \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Für eine nichtlineare Gaußfilterkette der Länge 2 sind folgende Parameter bei einem Signal-Rausch-Verhältnis $R = \frac{H_{min}}{2\sigma_{\text{RAUSCH}}}$ optimal:*

| ORT | WERT |
|---|---|
| $\eta_1 = \frac{\sqrt[n]{4}}{2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[n]{\mathcal{O}(R)^2}}$ | $\zeta_{\text{WERT},1} = 2\cdot\sigma_{\text{RAUSCH}}$ |
| $\eta_2 = \sqrt{\frac{\sqrt[n]{16}}{4\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[n]{R^4}} - \frac{1}{\sqrt[n]{\mathcal{O}(R)^4}}\right)}$ | $\zeta_{\text{WERT},2} = \mathcal{O}(R)\cdot\sigma_{\text{RAUSCH}}$ |

Beweis:
Wie zu Beginn von Abschnitt 2.3.3 bereits erläutert, setzen wir $t_2 := R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_2 &= L_n^{-1}(R) \\ &= \frac{\sqrt[n]{4}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{R^2}} \end{aligned}$$

Nach Satz 2.28 erfüllt

$$\begin{aligned} t_1 &= \mathcal{O}(t_2) \\ &= \sqrt[3]{2\cdot R^2 + \sqrt[2]{\frac{R^6}{27} + 4\cdot R^2}} + \sqrt[3]{2\cdot R^2 - \sqrt[2]{\frac{R^6}{27} + 4\cdot R^2}} \end{aligned}$$

das Optimalitätskriterium 2.27 für $k = 2$ und wegen $\eta_1 = s_1 = L_n^{-1}(t_1)$ folgt

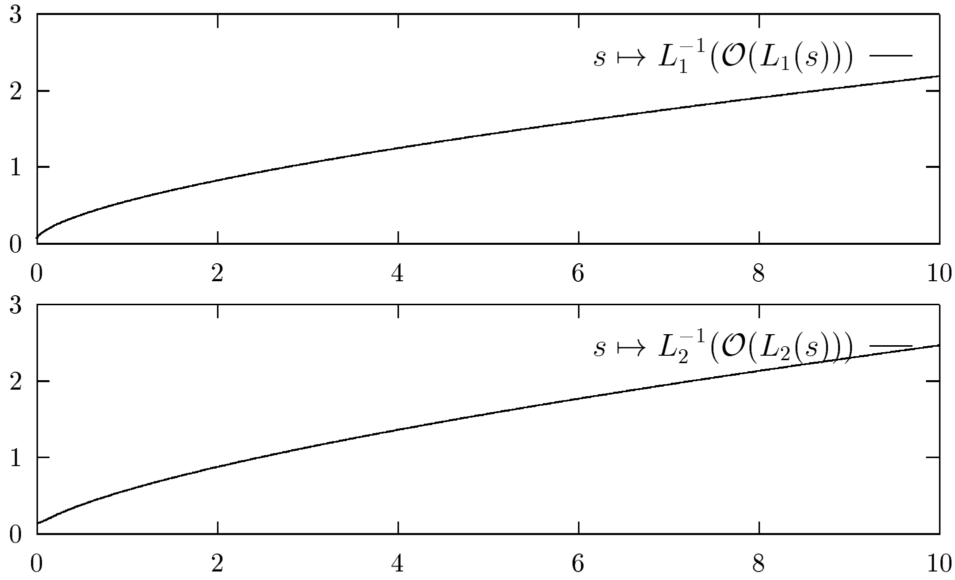
$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\sqrt[n]{4}}{2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[n]{t_1^2}} \\ &= \frac{\sqrt[n]{4}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\mathcal{O}(R)^2}} \end{aligned}$$

Aus $\eta_2 = \sqrt{(s_2)^2 - (s_1)^2} = \sqrt{(s_2)^2 - (\eta_1)^2}$ folgt damit

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\sqrt[n]{16}}{4\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[n]{R^4}} - \frac{1}{\sqrt[n]{\mathcal{O}(R)^4}}\right)}$$

Wähle die Wertevarianzen $\zeta_{\text{WERT},1} = 2\cdot\sigma_{\text{RAUSCH}}$ und $\zeta_{\text{WERT},2} = t_1\cdot\sigma_{\text{RAUSCH}} = \mathcal{O}(R)\cdot\sigma_{\text{RAUSCH}}$. Diese Parameter erfüllen das Optimalitätskriterium 2.25 und wir erhalten minimale

Verschmierung. Wegen $s_1 = L_n^{-1}(t_1) = L_n^{-1}(\mathcal{O}(t_2)) = L_n^{-1}(\mathcal{O}(L_n(s_2)))$ zeigen die unteren Abbildungen, wie $s_1$ von $s_2$ für $n = 1, 2$ abhängt.

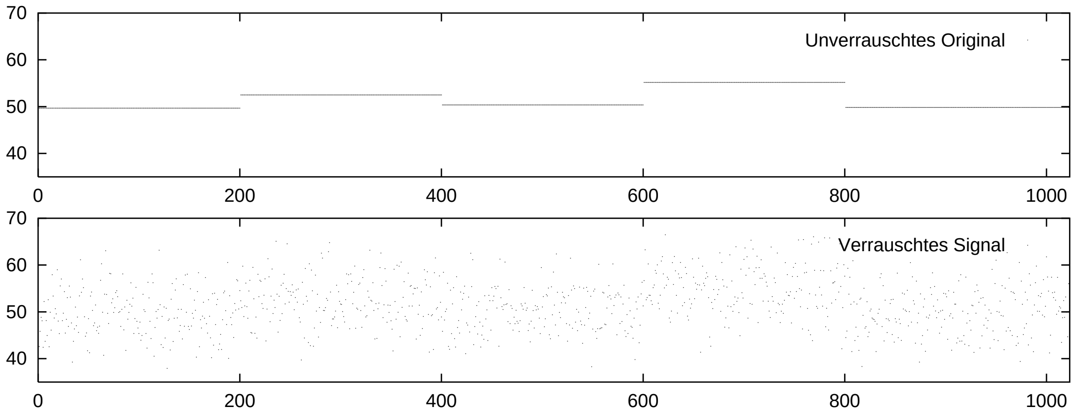


## 2.4 Beispiele zur kantenerhaltenden Glättung

### 2.4.1 Signale

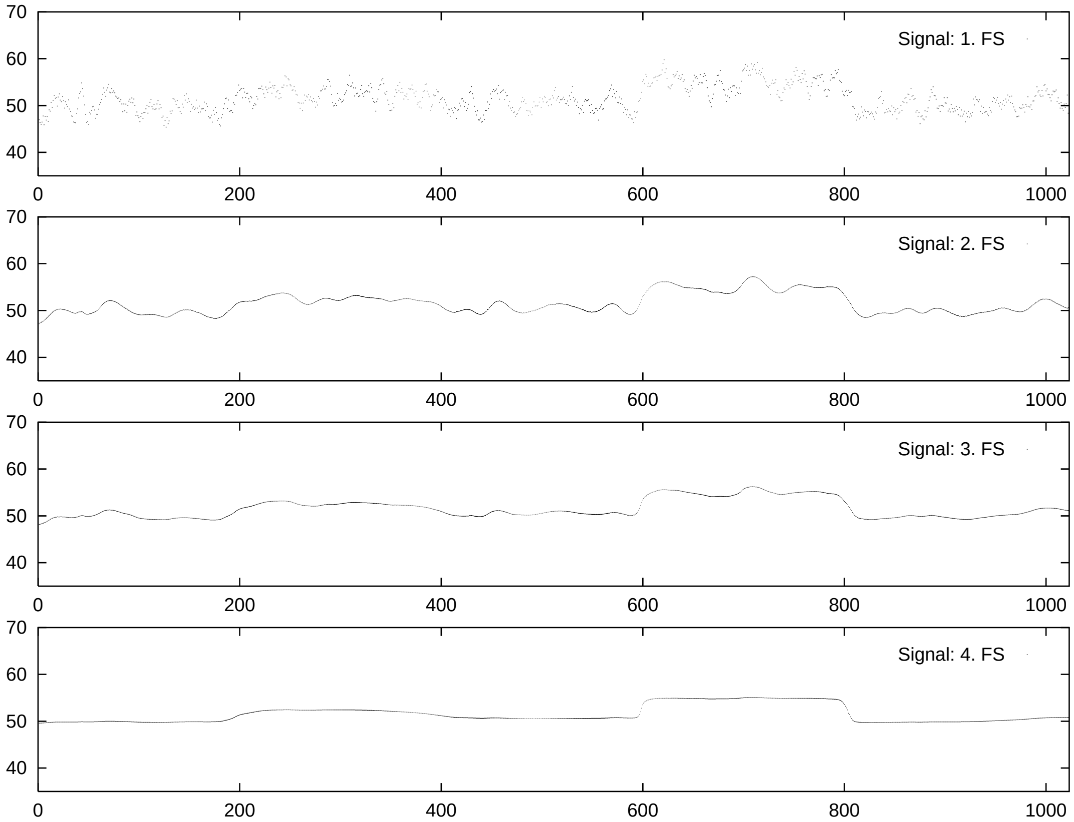
In diesem Abschnitt werden zwei Beispiele zur nichtlinearen Gaußfilterkette vorgestellt. Beim ersten Beispiel hat das Signal horizontale Sprünge, beim zweiten Beispiel steigt das Signal linear an.

**Beispiel: Signalsprünge mit unterschiedlicher Höhe**
Das folgende Signal der Länge 1024 ist durch Gaußrauschen der Varianz 5 aus dem Signal hervorgegangen, das auf dem Intervall $[\![201, 400]\!]$ den Wert 52.5, auf $[\![601, 800]\!]$ den Wert 55 annimmt und 50 sonst. Das Signal-Rausch-Verhältnis beträgt in der linken Intervallhälfte somit $\frac{1}{4}$ und in der rechten Intervallhälfte $\frac{1}{2}$.

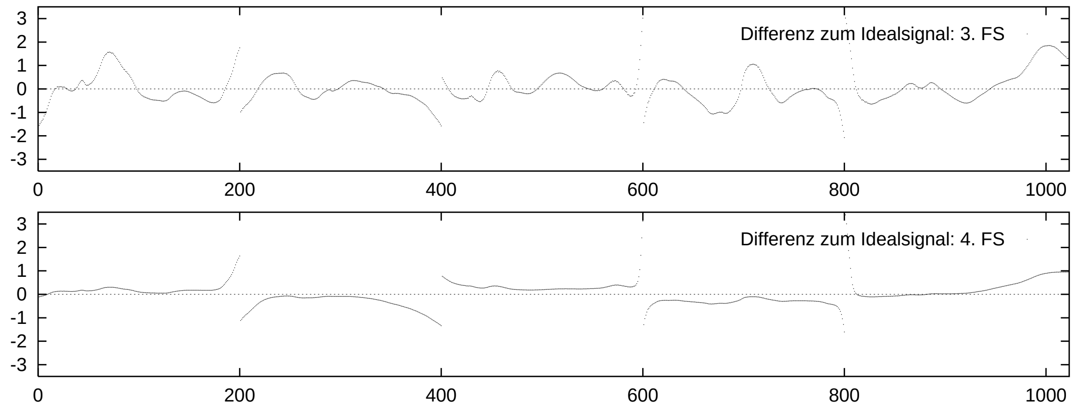



Wir filtern dieses Signal mit einer nichtlinearen Gaußfilterkette der Länge 4 mit den Anfangswerten $\eta = 1$ und $\zeta_{\text{WERT}} = 15$. Nach Strategie 2.1 halbieren wir die Wertevarianz und vervierfachen die Ortsvarianz nach jedem Filterschritt. Sei $N$ die Anzahl der Nachbarn, die in die nichtlineare Mittelung an einer Stelle $t_0$ eingeht.

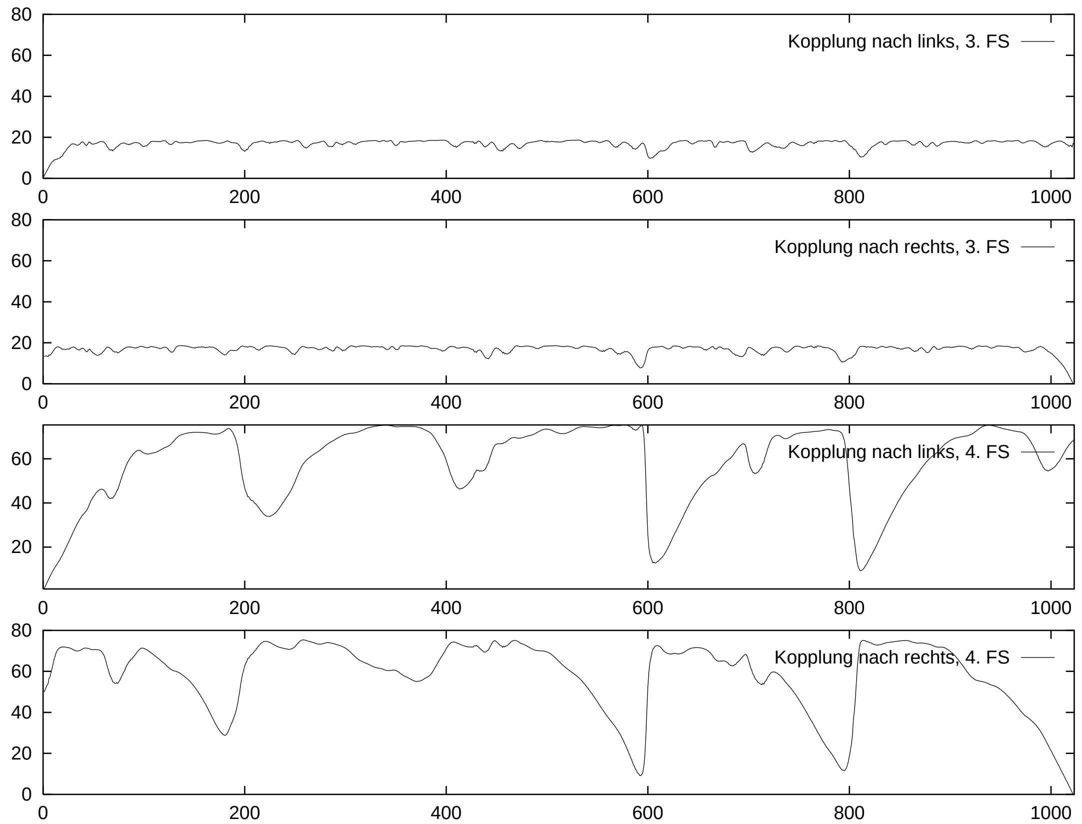
| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS |
|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 15.0 | 7.5 | 3.75 | 1.88 |
| $\eta$ | 1 | 4 | 16 | 64 |
| $N$ | 4 | 16 | 64 | 256 |



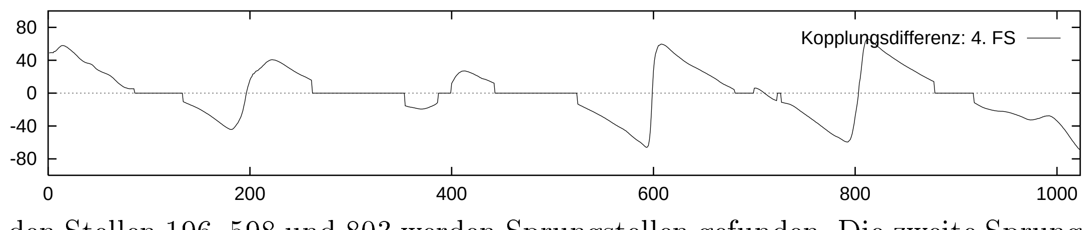

Der erste und zweite Sprung werden durch die Filterkette verschmiert. Der dritte und vierte Sprung sind im Filterergebnis deutlich zu erkennen. Unten ist die Differenz des gefilterten Signals zum idealen Signal abgebildet.



Das Filter koppelt wie folgt:



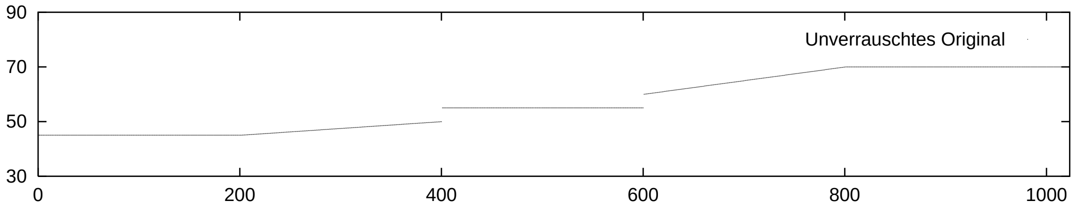

In der Nähe der Stellen 200, 600 und 800 sind deutliche Einbrüche in der Kopplung zu erkennen, die auf einen Signalsprung hinweisen. Wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, detektieren wir die Signalsprünge aus der Kopplungsdifferenz durch ein nichtlineares Differenzenfilter. Signalsprünge entsprechen deutlichen Übergängen von - nach + in der Kopplungsdifferenz:




An den Stellen 196, 598 und 803 werden Sprungstellen gefunden. Die zweite Sprungstelle liegt im Intervall $[\![386, 400]\!]$ und kann nicht lokalisiert werden.

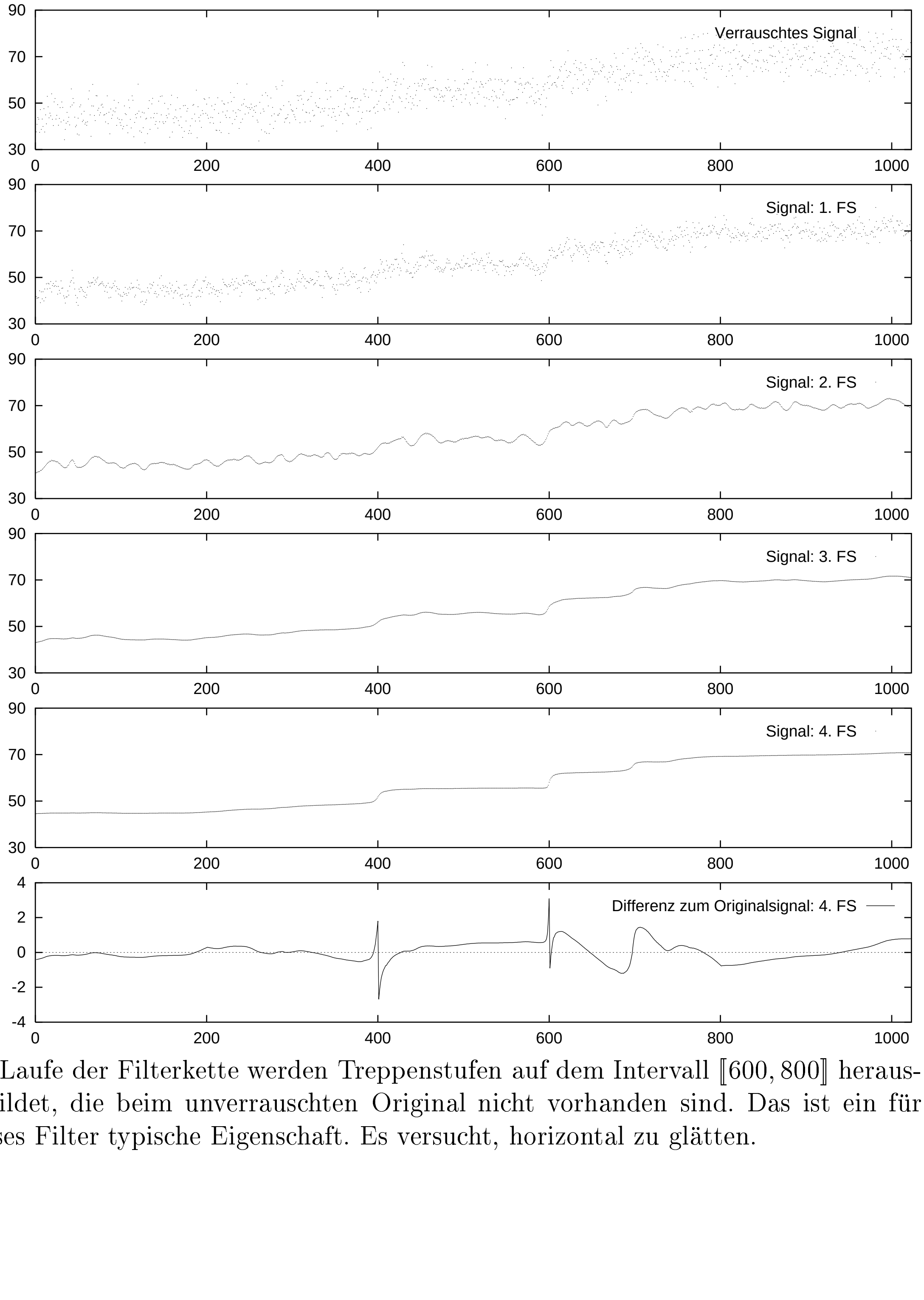
**Beispiel: Linear ansteigendes Signal**
Das folgende Signal der Länge 1024 hat 2 Sprünge an den Stellen 400 und 600. Auf dem Intervall

| | |
|---|---|
| $[\![1, 200]\!]$ | ist das Signal konstant gleich 45 |
| $[\![201, 400]\!]$ | steigt es linear von 45 auf 50 an |
| $[\![401, 600]\!]$ | ist das Signal konstant gleich 55 |
| $[\![601, 800]\!]$ | steigt es linear von 60 auf 70 an |
| $[\![800, 1024]\!]$ | ist das Signal konstant gleich 70 |

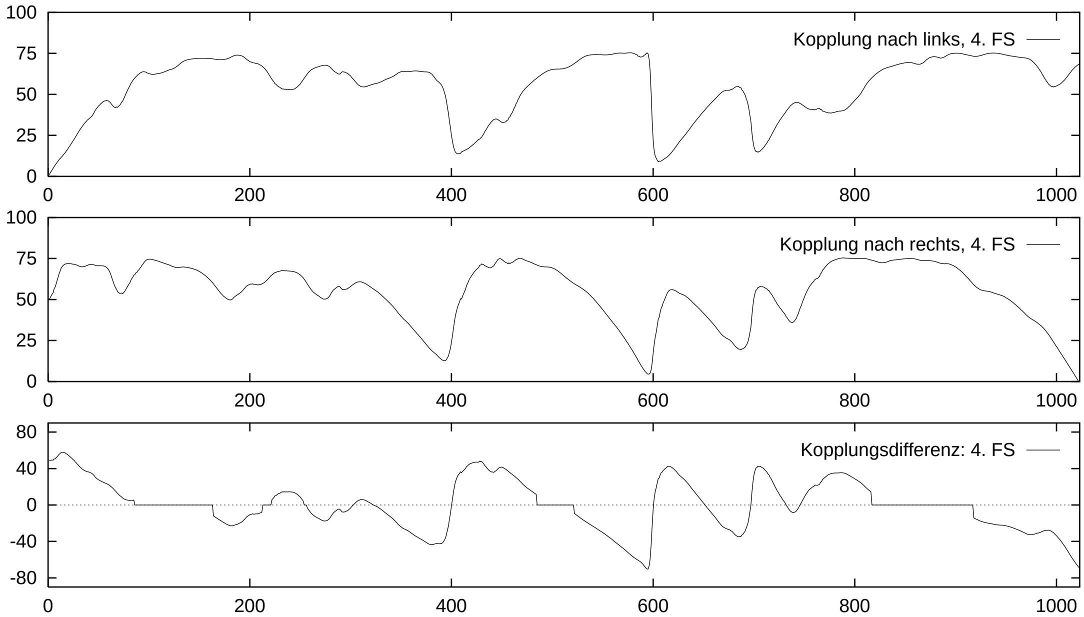



Wir verrauschen das Signal mit Gaußrauschen der Varianz 5. Dieses Signal filtern wir mit einer nichtlinearen Gaußfilterkette der Länge 4 mit den gleichen Parametern wie beim obigen Beispiel.

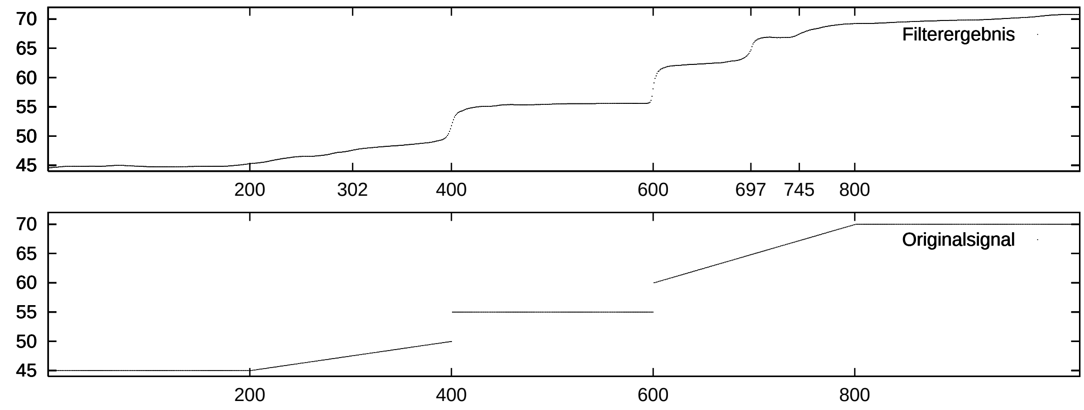
| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS |
|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 15.0 | 7.5 | 3.75 | 1.88 |
| $\eta$ | 1 | 4 | 16 | 64 |
| $N$ | 4 | 16 | 64 | 256 |




Im Laufe der Filterkette werden Treppenstufen auf dem Intervall $[\![600, 800]\!]$ herausgebildet, die beim unverrauschten Original nicht vorhanden sind. Das ist ein für dieses Filter typische Eigenschaft. Es versucht, horizontal zu glätten.




Markante Einbrüche in der Kopplung beim letzten Filterschritt gibt es in der Nähe der Stellen 200 und 400. Insgesamt werden an den Stellen 302, 400, 600, 697 und 745 Sprungstellen markiert.

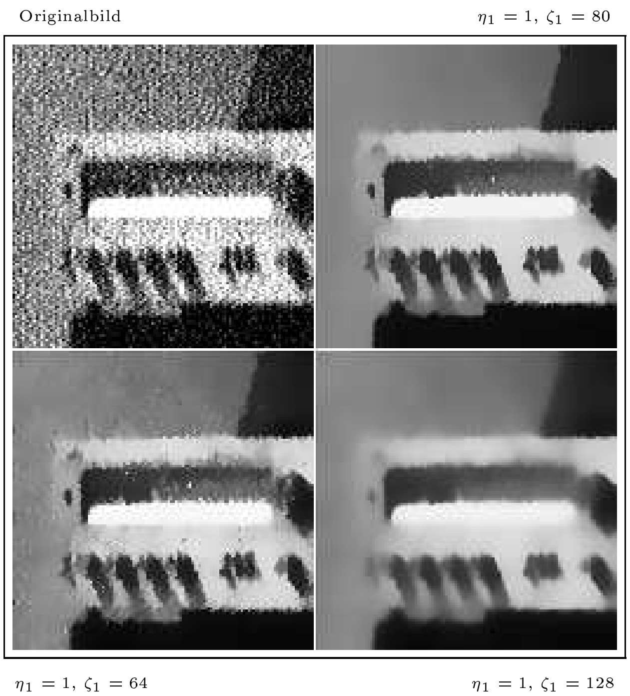


### 2.4.2 Bilder

In Anwendungen sind zweidimensionale Signale häufig Bilder, die von einer Kamera oder einem bildgebenden Verfahren wie Tomografie oder Radar erzeugt werden.

Die Strategie 2.1 für die Wahl der Parameter einer nichtlinearen Gaußfilterkette führt dann im Fall $\alpha = 2$ gerade auf die in [Weu94, AuWeu96] vorgeschlagene Verdoppelungs–Halbierungs–Strategie, die dort jedoch nur empirisch begründet wird. Diese Strategie hat sich bei dem in [Dau95] entwickeltem Kompressionsverfahren für Grauwertbilder gut bewährt.

In der untenstehenden Abbildung sind ein stark verrauschtes Bild und die Ergebnisse von 4-stufigen Filterketten mit Verdoppelungs–Halbierungs–Strategie mit unterschiedlichen Anfangsparametern gezeigt.



### 2.4.3 Bildfolgen

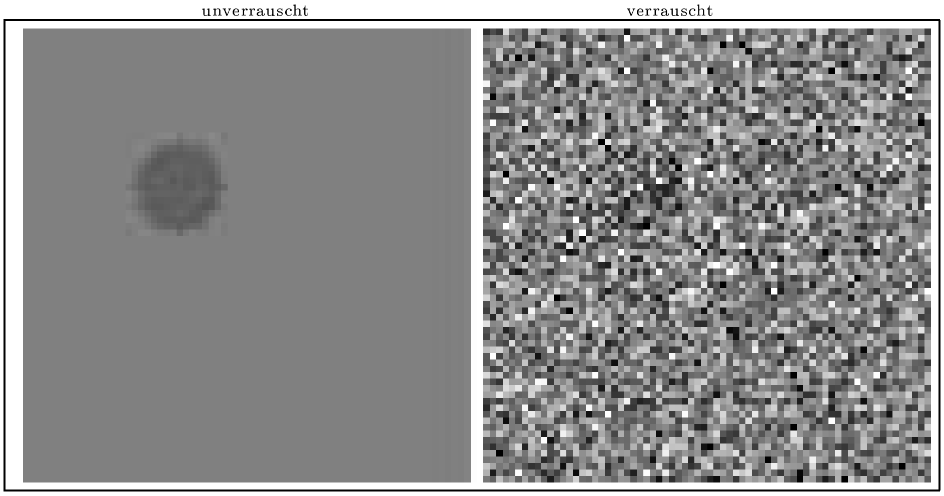
Ein wichtiges Beispiel für dreidimensionale Signale sind Folgen von Bildern. Die dritte Dimension, mit der die Bilder indiziert sind, kann die Zeit sein, z.B. wenn die Bilder von einer Kamera erzeugt werden, oder sie kann eine dritte Raumdimension sein, z.B. bei Tomografieverfahren die Schicht angeben, von der das jeweilige Bild erzeugt wurde.

In beiden Fällen ist es oft wichtig, eine kantenerhaltende Glättung im Dreidimensionalen durchzuführen, weil auch dreidimensionale Strukturen, wie z.B. die Bewegung eines Objektes oder ein Tumor extrahiert werden sollen.

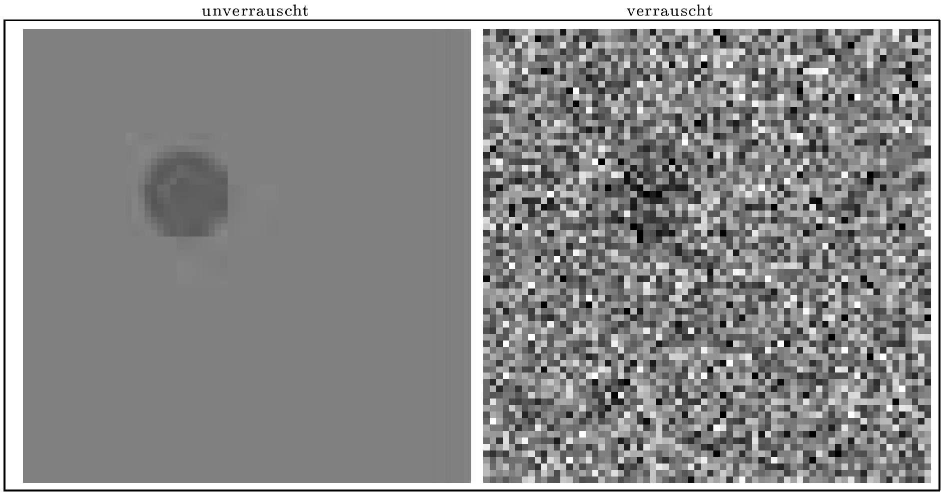
Wie die folgende Bildfolge zeigt, lassen sich bei kleinem SNR durch Glättung im Dreidimensionalen noch Strukturen extrahieren, die in den einzelnen Bildern kaum noch zu erkennen sind. Die Bildfolge wurde synthetisch erzeugt. Das unverrauschte Original zeigt eine dunkle Kreisscheibe, die auf einem homogenen Hintergrund mit einer Geschwindigkeit von einem Pixel pro Bild diagonal von links oben nach rechts unten läuft. Die Kreisscheibe ist um 32 Grauwerte dunkler als der Hintergrund. Die Bilder der Folge wurden durch normalverteiltes Rauschen mit der Standardabweichung 48 gestört. Zur Glättung wurde eine 4-stufige nichtlineare Gaußfilterkette mit folgenden Parametern verwendet:

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= 0.7 \\
\eta_{j+1} &= \sqrt[3]{4} \cdot \eta_j && \text{für } j \geq 1 \\
\\
\zeta_1 &= 144 &&= 3 \cdot \sigma_{\text{RAUSCH}} \\
\zeta_2 &= 48 &&= \sigma_{\text{RAUSCH}} \\
\\
\zeta_{j+1} &= \tfrac{1}{2} \cdot \zeta_j && \text{für } j \geq 2
\end{aligned}
$$

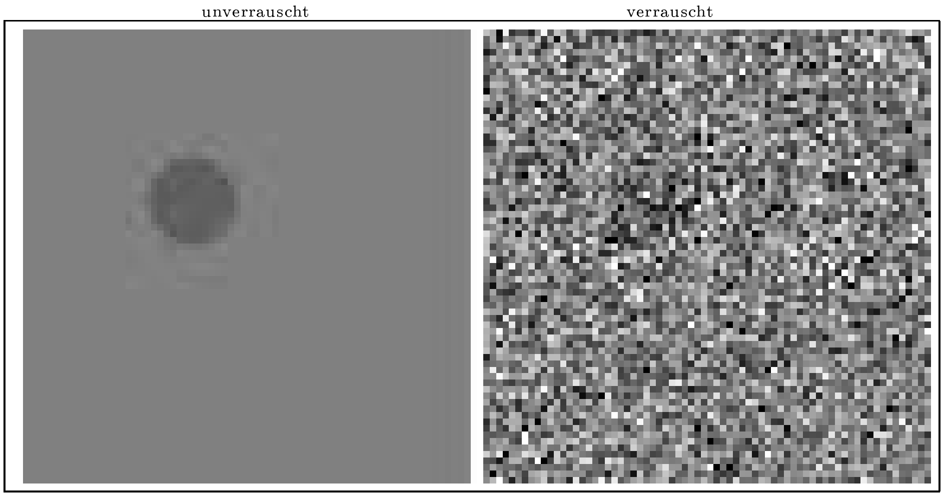
Um zu demonstrieren, daß aus dem Filterergebnis die Kreisscheibe tatsächlich recht gut extrahiert werden kann, wurde noch mit einem nichtlinearen Differenzenfilter wie in [Weu94] eine lokale Binärisierung durchgeführt. Es werden drei aufeinanderfolgende, typische Bilder der Folge und die entsprechenden Filterergebnisse gezeigt.



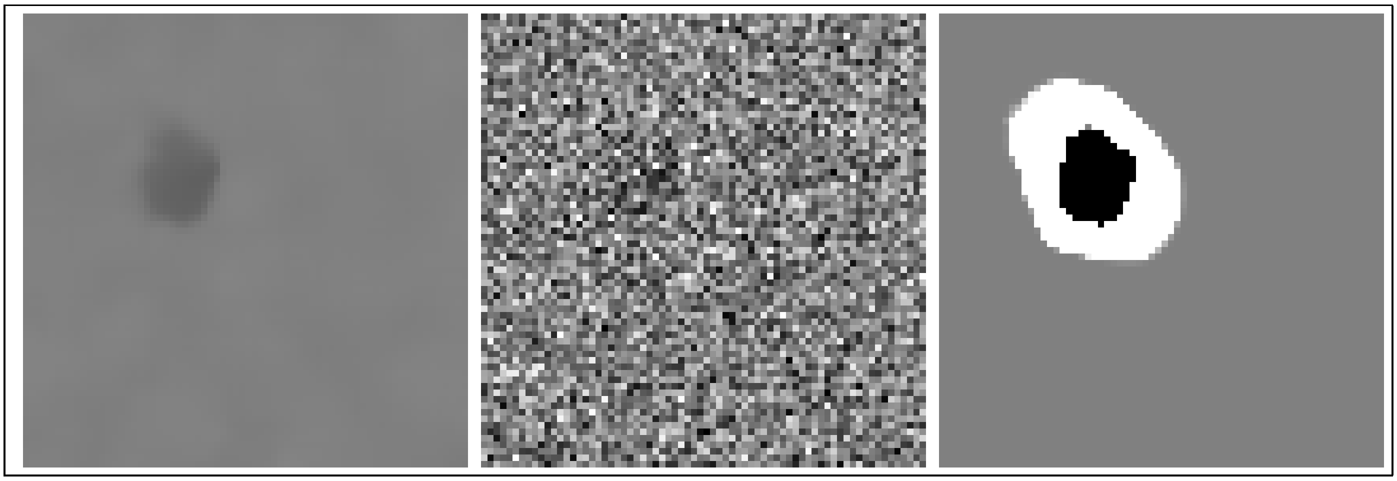

Original Nr. 14



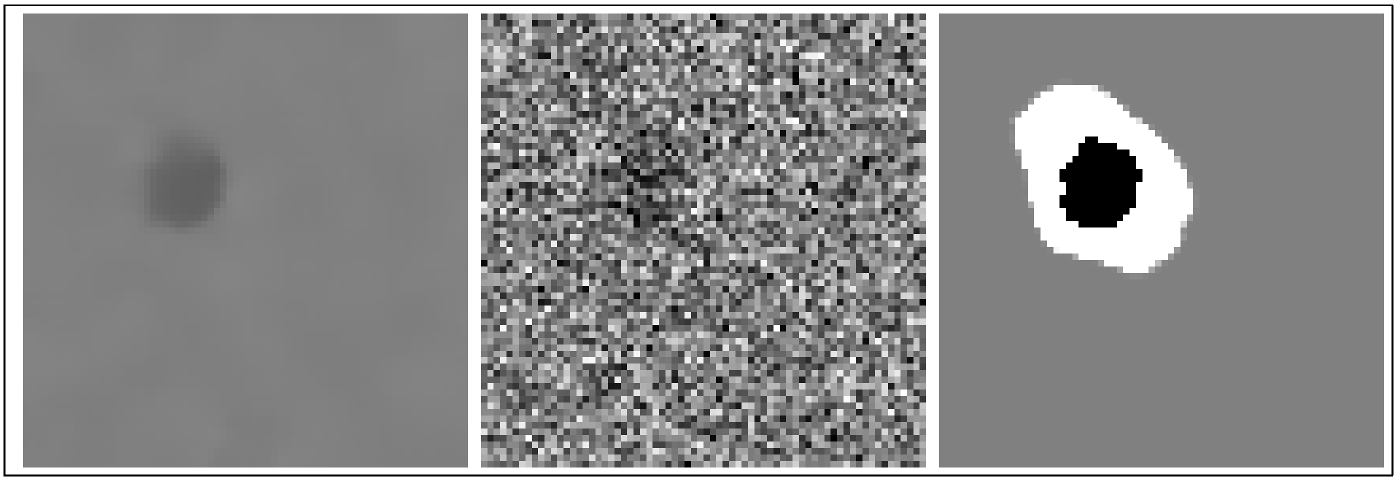

Original Nr. 15



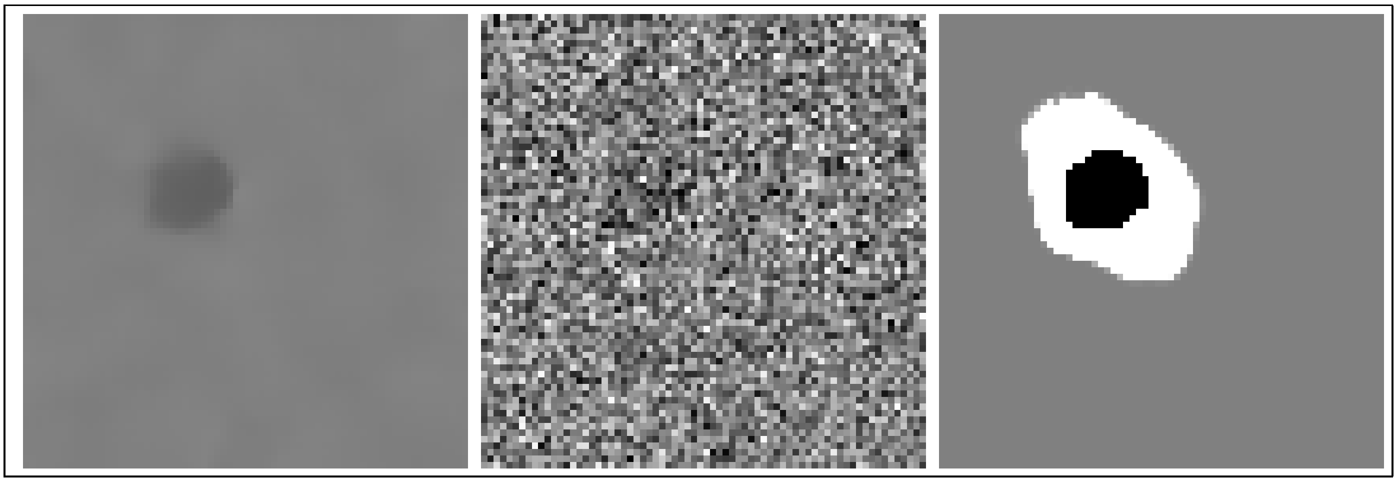

Original Nr. 16




Ergebnis: Bild 14




Ergebnis: Bild 15




Ergebnis: Bild 16

# Kapitel 3

# Die Glättung komplexer, langsam variierender Signale mit Sprüngen

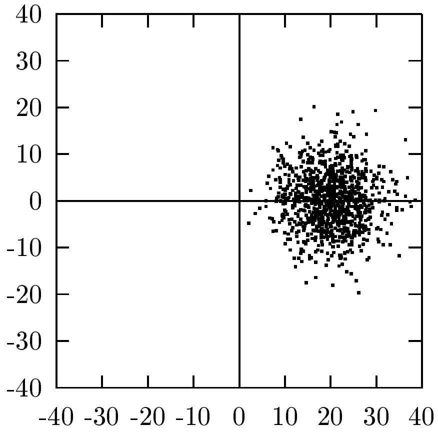
Sei in diesem Abschnitt $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{Z}^n$ eine endliche Teilmenge. Für alle $t_0 \in D$ sei $U(t_0)$ eine Umgebung von $t_0$ in $D$. Sei $\eta$ die Ortsvarianz des nichtlinearen Gaußfilters. Als Ortsumgebung bei der nichtlinearen Gaußfilterung eines Signals $f\colon D \to \mathbb{C}$ nehmen wir, wenn nichts anderes gesagt ist, den Quader mit der Kantenlänge $2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil + 1$ mit Mittelpunkt $t_0$ geschnitten mit $D$.
Wir lassen für $n = 1$ somit nur $2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil$ Nachbarwerte in die Mittelung an einer Stelle $t_0$ eingehen.

Wir werden im folgenden verrauschte komplexwertige Signale sprungerhaltend glätten. Dazu muß das nichtlinearen Gaußfilter, das für reellwertige Signale definiert wurde, entsprechend den zwei verschiedenen Modellen für Signalrauschen modifiziert werden.

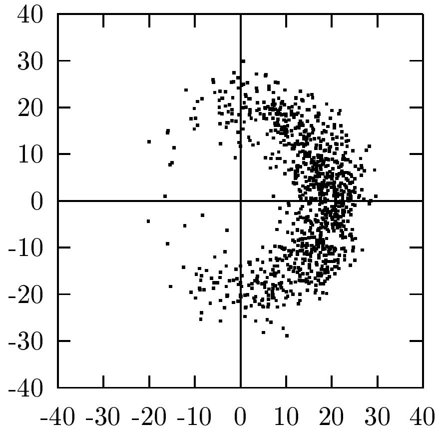
**Beispiel 3.1** *Die unteren Abbildungen zeigen die Werte zweier eindimensionaler, durch Rauschen gestörter Signale $f_1$ und $f_2$ der Länge 1024 in der komplexen Ebene.*

*Die Signale $f_1$ und $f_2$ sind aus dem Signal $x \mapsto (20, 0)$ durch die Störung mit normalverteiltem Rauschen entstanden.*

*Die linke Abbildung zeigt die Werte des mit den Varianzen $\rho_{\text{RE}} = \rho_{\text{IM}} = 6.0$ in Real- und Imaginärteil normalverteilt verrauschten Signals $f_1$. Die rechte Abbildung zeigt die Werte des mit $\rho_{\text{AMP}} = 4$ und $\rho_{\text{PHAS}} = 0.15 \cdot \pi$ in Amplitude und Phase verrauschen Signals $f_2$.*




$f_1$: *Real-Imaginärteil-Rauschen*
$\rho_{\text{RE}} = \rho_{\text{IM}} = 6.0$




$f_2$: *Amplituden-Phasen-Rauschen*
$\rho_{\text{AMP}} = 4.0, \rho_{\text{PHAS}} = 0.15 \cdot \pi$

Um das Rauschen zu reduzieren, bietet sich beim linken Signal die Mittelung in kartesischen Koordinaten an, während beim rechten Signal eine Mittelung in Polarkoordinaten vorzuziehen ist. Das nichtlineare Gaußfilter, das bisher für reellwertige Signale definiert wurde, muß daher entsprechend modifiziert werden.

## 3.1 Das nichtlineare Gaußfilter zur Glättung von Real–Imaginärteil–verrauschten Signalen

**Definition 3.2** *Seien $\eta, \zeta_{\text{WERT}} \in \mathbb{R}^+$. Für jedes Signal $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{Z}^n$ wird das* **kartesische nichtlineare Gaußfilter** *definiert als*

$$G_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}(f)(t_0) \quad := \quad \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0) \cap D} g_\eta(\|t - t_0\|) \cdot g_{\zeta_{\text{WERT}}}(\|f(t) - f(t_0)\|) \cdot f(t)$$

*mit Normierungsfaktor $M(t_0) := \sum_{t \in U(t_0) \cap D} \kappa_{t,t_0}$ und Kopplung*

$$\kappa_{t,t_0} \quad := \quad g_\eta(\|t - t_0\|) \;\cdot\; g_{\zeta_{\text{WERT}}}(\|f(t) - f(t_0)\|)$$

**Bemerkung 3.3** *Es gilt*

$$G_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}(f)(t_0) \quad = \quad f(t_0) \;+\; \frac{1}{M(t_0)} \;\cdot \sum_{t \in U(t_0) \cap D} \kappa_{t,t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$$

## 3.2 Das nichtlineare Gaußfilter zur Glättung von Amplituden–Phasen–verrauschten Signalen

Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ ein in Amplitude und Phase verrauschtes Signal, so müssen wir in Polarkoordinaten mitteln. Analog zu Bemerkung 3.3 soll gerade die gewichtete Summe der Abweichung der Amplituden (Phasen) für alle $t \in U(t_0)$ zur Amplitude (Phase) an der Stelle $t_0$ berechnet werden.

Das Problem besteht darin, daß die Phase nur modulo $2\pi$ vorliegt oder mit anderen Worten daß die Polarkoordinaten eigentlich eine Abbildung in den Zylinder

$$\mathbb{R} \times [0, 2\pi]/_{2\pi\mathbb{Z}} \;\cong\; \mathbb{R} \times S^1$$

sind, der keine Vektorraumstruktur trägt, bezüglich der man lineare Mittelwerte bilden kann. Wir müssen zunächst klären, wie Signalwerte in Polarkoordinaten gemittelt werden sollen.

### Mittelung in Polarkoordinaten modulo $2\pi$

Um bei $t_0 \in D$ Signalwerte zu mitteln, bilden wir den Zylinder $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]/_{2\pi\mathbb{Z}}$ nach $\mathbb{R}^2$ ab, indem wir ihn längs der Geraden

$$\mathbb{R} \times \{\arg f(t_0) + \pi\}$$

aufschlitzen und auf den Streifen $\mathbb{R}\times ]-\pi, \pi[$ abwickeln.
Dann kann die Amplitude und die Phase in kartesischen Koordinaten gemittelt werden. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da bei der Phase die gewichtete Summe der Abstände von $\arg f(t)$ zu $\arg f(t_0)$ für alle $t \in U(t_0)$ berechnet werden soll. Sei $f^{\text{NEU}}\colon D \to \mathbb{C}$ das Ergebnis der Mittelung.

$$\begin{array}{lcrcl}
|f^{\text{NEU}}(t_0)| & := & |f(t_0)| & + & \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum \kappa_{t,t_0} \cdot (|f(t)| - |f(t_0)|) \\
\arg f^{\text{NEU}}(t_0) & := & \arg f(t_0) & + & \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum \kappa_{t,t_0} \cdot (\arg f(t) - \arg f(t_0))
\end{array}$$

### Gewichtung von Amplituden– und Phasenabweichungen

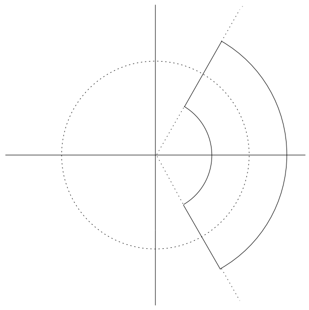
Sei $t \in U(t_0)$. Wir gewichten die Abweichung der Amplituden- und Phasenwerte an der Stelle $t$ zur Stelle $t_0$ mit zwei Gaußglocken der Varianz $\zeta^2_{\text{AMP}}$ bzw. $\zeta^2_{\text{PHAS}}$

$$g_{\zeta_{\text{AMP}}}\big(\big|\, |f(t_0)| - |f(t)| \,\big|\big) \cdot \; g_{\zeta_{\text{PHAS}}}(|\arg f(t_0) - \arg f(t)|)$$

Durch $\zeta_{\text{AMP}}$ und $\zeta_{\text{PHAS}}$ wird ein **Sektor** um den Wert $f(t_0)$ in der komplexen Ebene definiert.

$$\big\{ r \cdot \exp(i\varphi) \in \mathbb{C} \;:\; \big|\,|f(t_0)| - r\,\big| \le 3 \cdot \zeta_{\text{AMP}},\; |\arg f(t_0) - \varphi| \le 3 \cdot \zeta_{\text{PHAS}} \big\}$$

**Sektor**



Die Werte von $f|_{U(t_0)}$, die nicht in diesem Sektor um $t_0$ liegen, werden bei der Mittelung praktisch abgeschnitten, da sie mit einem Gewichtsfaktor

$$\kappa \;<\; g_{\zeta_{\text{AMP}}}(3\zeta_{\text{AMP}}) \;=\; g_{\zeta_{\text{PHAS}}}(3\zeta_{\text{PHAS}}) \;=\; \exp\left(-\frac{9}{2}\right) \;<\; 0.01111$$

gewichtet werden. Der Sektor wird zu einem Kreisring, wenn $\zeta_{\text{PHAS}} \geq \frac{1}{3}\pi$ ist. Die Gewichtsfunktion für die Abweichung der Phase ist dann eine abgeschnittene Gaußglocke. Ist $\zeta_{\text{PHAS}} \gg \frac{1}{3}\pi$, so ist die Gewichtung der Phase ähnlich einer Gleichgewichtung.

Jetzt können wir das nichtlineare Gaußfilter für Signale, die in Amplitude und Phase verrauscht sind, definieren.

**Definition 3.4** *Seien $\eta, \zeta_{\text{AMP}}, \zeta_{\text{PHAS}} \in \mathbb{R}^+$. Für jedes Signal $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{Z}^n$ wird das* **polare nichtlineare Gaußfilter** *definiert als*

$$G_{\eta,\rho_{\text{AMP}},\zeta_{\text{PHAS}}}(f)(t_0) \quad := \quad r(t_0) \cdot \exp(i \cdot \varphi(t_0))$$

*wobei $r$ und $\varphi$ definiert sind durch:*

$$\begin{aligned} r(t_0) \;&:=\; |f(t_0)| \;+\; \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0)} \kappa_{t,t_0} \cdot (|f(t)| - |f(t_0)|) \\ \varphi(t_0) \;&:=\; \arg f(t_0) \;+\; \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0)} \kappa_{t,t_0} \cdot (\arg f(t) - \arg f(t_0)) \end{aligned}$$

*mit dem Normierungsfaktor $M(t_0) := \sum_{t \in U(t_0)} \kappa_{t,t_0}$ und der Kopplung*

$$\kappa_{t,t_0} \quad := \quad g_\eta(\|t - t_0\|) \;\cdot\; g_{\zeta_{\text{AMP}}}\big(\big|\,|f(t_0)| - |f(t)|\,\big|\big) \cdot\; g_{\zeta_{\text{PHAS}}}(|\arg f(t_0) - \arg f(t)|)$$

**Bemerkung 3.5** *Amplitude und Phase werden getrennt gemittelt, jedoch zusammen gewichtet. Daher verstärken sich Amplituden- und Phasensprünge gegenseitig.*

## 3.3 Beispiele

Wir wollen das Filterergebnis eines verrauschten Signals mit dem bestmöglichen Filterergebnis, das erzielt werden kann, vergleichen. Ein Filterergebnis ist optimal, wenn die Verschmierung minimal ist. Es ist ideal, wenn keine Verschmierung auftritt. Um das ideale Signal berechnen zu können, müssen die Sprungstellen des Signals bekannt sein.

**Definition 3.6** *Sei* $f\colon [\![1,l]\!] \to \mathbb{R}$ *eine Realisierung eines verrauschten reellen Signals, das aus einem stückweise konstanten, reellen Signal mit* $m$ *Sprüngen an den Stelle* $1 < t_1 < \cdots < t_m < l$ *entstanden ist, das die Gestalt*

$$\sum_{j=1}^{m-1} a_j \cdot \chi_{[t_{j-1}+1,t_j]}$$

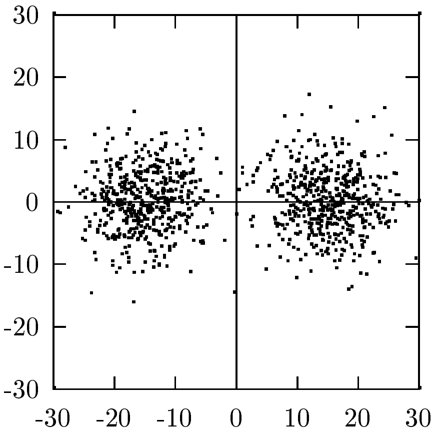
*hat. Dabei sei* $t_0 := 0$ *und* $t_{m+1} := l$ *und* $a_j \in \mathbb{R}$. *Dann sei das zu* $f$ **ideale Signal** $f^\star$ *definiert durch den Mittelwert zwischen den Sprungstellen:*

$$f^\star \quad := \quad \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{1}{t_{j-1}+1-t_j} \cdot \sum_{t=t_{j-1}+1}^{t_j} f(t) \right) \cdot \chi_{[t_{j-1}+1,t_j]}$$

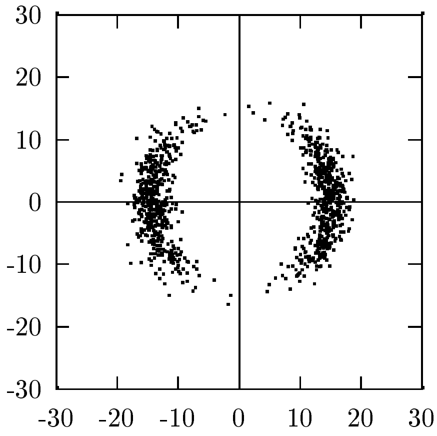
*Für komplexwertige Signale definieren wir* $f^\star$ *bei Real-Imaginärteil-Rauschen durch Mittelung in kartesischen Koordinaten und für Amplituden-Phasen-Rauschen durch Mittelung in Polarkoordinaten wie beim polaren Gaußfilter.*

Die unteren Abbildungen zeigen die Werte zweier Signale $f_1$ und $f_2$ der Länge 1024 in der komplexen Ebene. Sie sind aus folgendem Signal $f$ durch die Störung mit normalverteiltem weißen Rauschen entstanden:

$$f \quad = \quad (-15,0) \cdot \chi_{[1,512]} + (15,0) \cdot \chi_{[513,1024]}$$




$f_1$: Real-Imaginärteil-Rauschen
$\rho_{\text{RE}} = \rho_{\text{IM}} = 5.0$




$f_2$: Amplituden-Phasen-Rauschen
$\rho_{\text{AMP}} = 1.5, \rho_{\text{PHAS}} = 0.15 \cdot \pi$

Die linke Abbildung zeigt die Werte des mit den Varianzen $\rho_{\mathrm{RE}} = \rho_{\mathrm{IM}} = 5.0$ in Real– und Imaginärteil normalverteilt verrauschten Signals $f_1$. Die rechte Abbildung zeigt die Werte des mit $\rho_{\mathrm{AMP}} = 1.5$ und $\rho_{\mathrm{PHAS}} = 0.15{\cdot}\pi$ in Amplitude und Phase verrauschten Signals $f_2$.

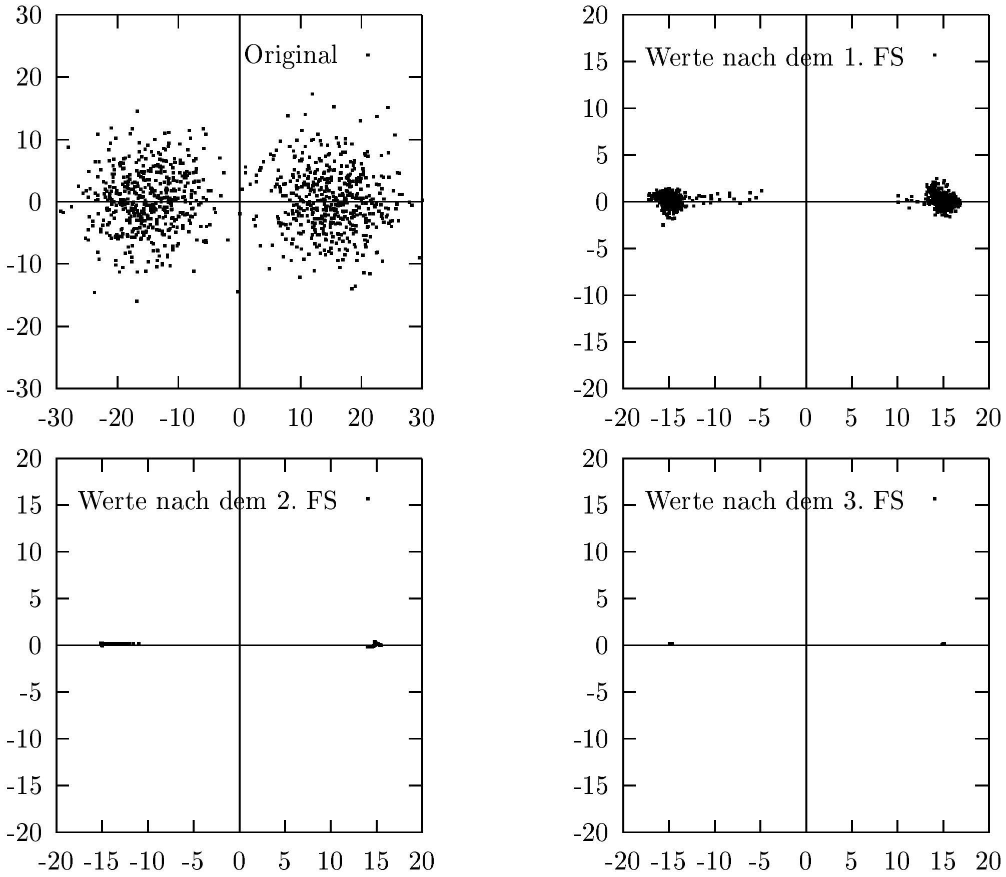
$$
\begin{aligned}
f_1^\star|_{[\![1,512]\!]} &= 14.98 & \qquad f_1^\star|_{[\![513,1024]\!]} &= -14.88 - i\cdot 0.04 \\
f_2^\star|_{[\![1,512]\!]} &= 15.13\cdot\exp(0.0035\pi i) & \qquad f_2^\star|_{[\![513,1024]\!]} &= 15.87\cdot\exp(1.0033\pi i)
\end{aligned}
$$

**Glättung von $f_1$**

Bei diesem Signal werden wir uns ansehen, wie die Punktwolken in der komplexen Ebene durch eine Filterkette der Länge 3 auf (fast) einen Punkt reduziert werden. Da das Rauschen im Verhältnis zur Sprunghöhe gering ist, wählen wir für den ersten Filterschritt $\zeta_{\text{WERT}} = 15.0$ und halbieren $\zeta_{\text{WERT}}$ nach jedem Filterschritt. Damit das Ergebnis möglichst glatt wird, wählen wir im ersten Filterschritt für die Gewichtung im Ort $\eta = 20$ und vervierfachen $\eta$ jeweils (Strategie 2.1 mit $\alpha = 2$). Mit den Parametern

| | 1.FS | 2.FS | 3.FS |
|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{WERT}}$ | 15.00 | 7.50 | 3.75 |
| $\eta$ | 20 | 80 | 320 |
| Nachbarn | 40 | 160 | 640 |

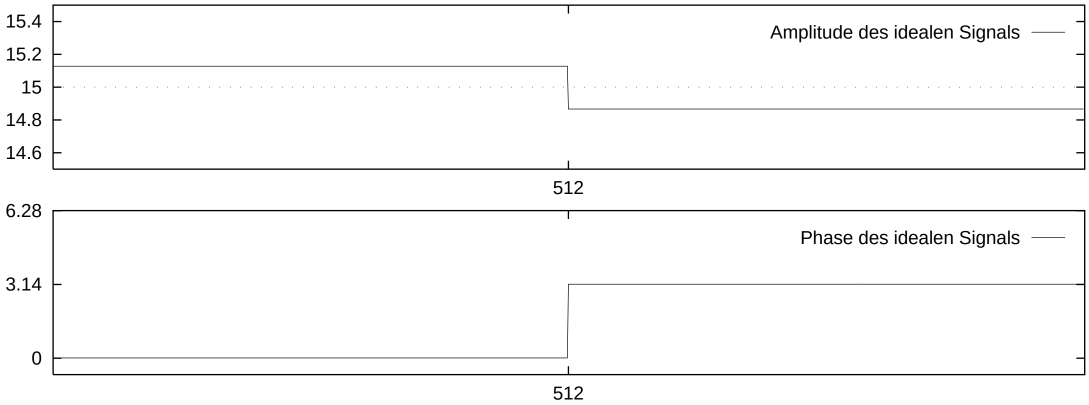
erhalten wir ein geglättetes Signal mit einer deutlichen Sprungstelle bei $t_0 = 512$




Der Realteil und der Imaginärteil des Ergebnisses des 3. Filterschrittes weichen betragsmäßig um maximal 0.17 (Realteil) bzw. 0.1 (Imaginärteil) vom idealen Signal $f_1^\star$ ab.

**Glättung von $f_2$**

Das ideale Signal zu $f_2$ hat in Amplitude und Phase einen Sprung bei $t_0 = 512$:

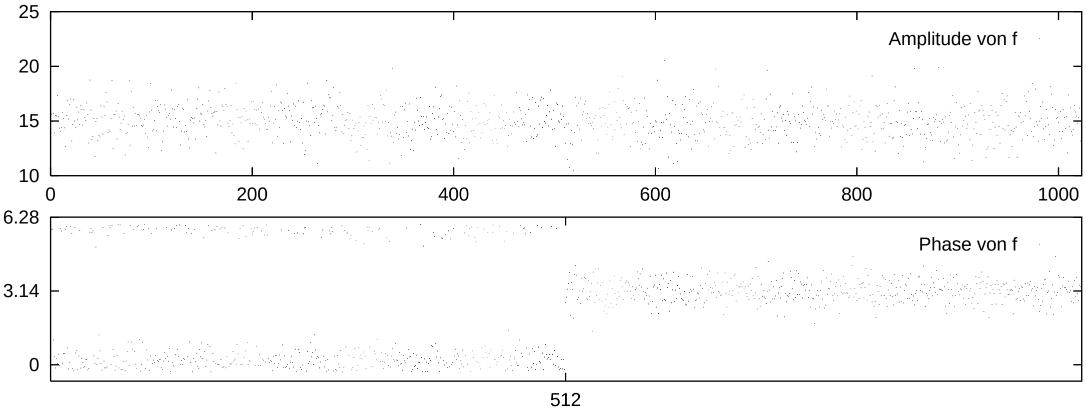



Wir werden das Signal $f$ mit einer nichtlinearen Gaußfilterkette der Länge 2 mit Halbierungs–Verdoppelungs–Strategie filtern und dabei die Kopplung $\kappa_{t_0}^{\rightarrow}$ und $\kappa_{t_0}^{\leftarrow}$ anschauen. Es werden die Differenz der Amplitude (Phase) zur Amplitude (Phase) des idealen Signals angezeigt. Die Werte der Phase sind modulo $2\pi$ abgebildet.

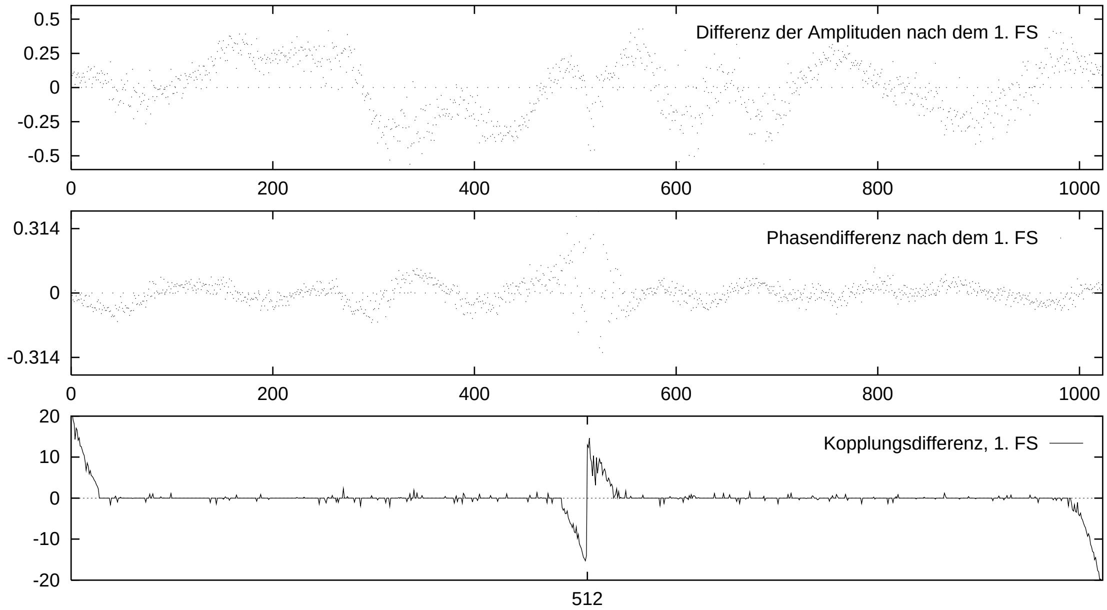
Wie in Abschnitt 2.12 beschrieben, soll der Sprung durch die Nulldurchgänge der Kopplungsdifferenz detektiert werden. Bei der Berechnung der Kopplungsdifferenz wird wie folgt vorgegangen: Sei $Max$ der maximale Wert, den $\kappa_{t_0}^{\leftarrow}$ oder $\kappa_{t_0}^{\rightarrow}$ annehmen kann:

$$Max \quad := \quad \frac{1}{2} \cdot \sum_{t \in U(T_0),\ t \neq t_0} g_\eta(\|t - t_0\|)$$

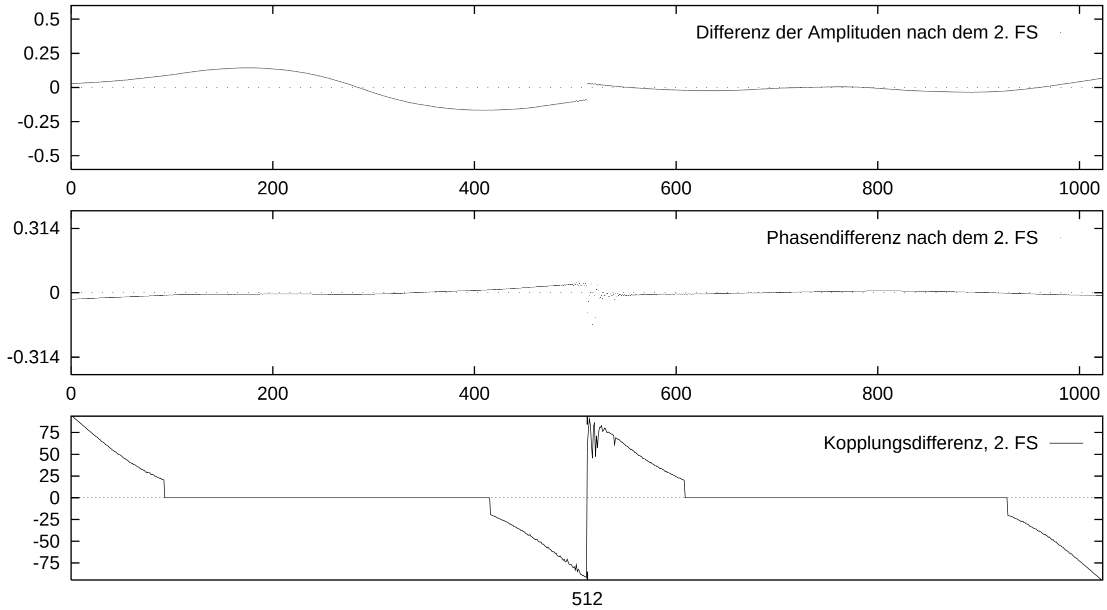
Ist $\kappa_{t_0}^{\leftarrow}$ und $\kappa_{t_0}^{\rightarrow}$ größer als $Max \cdot \frac{2}{3}$, so wird die Differenz $(\kappa_{t_0}^{\rightarrow} - \kappa_{t_0}^{\leftarrow})$ berechnet, ansonsten wird 0 gesetzt. Dadurch werden nur Nulldurchgänge an Stellen erzeugt, wo ausreichend viele Werte in die Mittelung eingegangen sind. Durch dieses Vorgehen werden nur aus den tieferen Einbrüchen in der Kopplung Nulldurchgänge erzeugt. Der Faktor $\frac{2}{3}$ hat sich bewährt.



Für den ersten Filterschritt wählen wir die Varianzen $\zeta_{\text{AMP}} = 5.0$, $\zeta_{\text{PHAS}} = 0.5\pi$, $\eta = 20$.

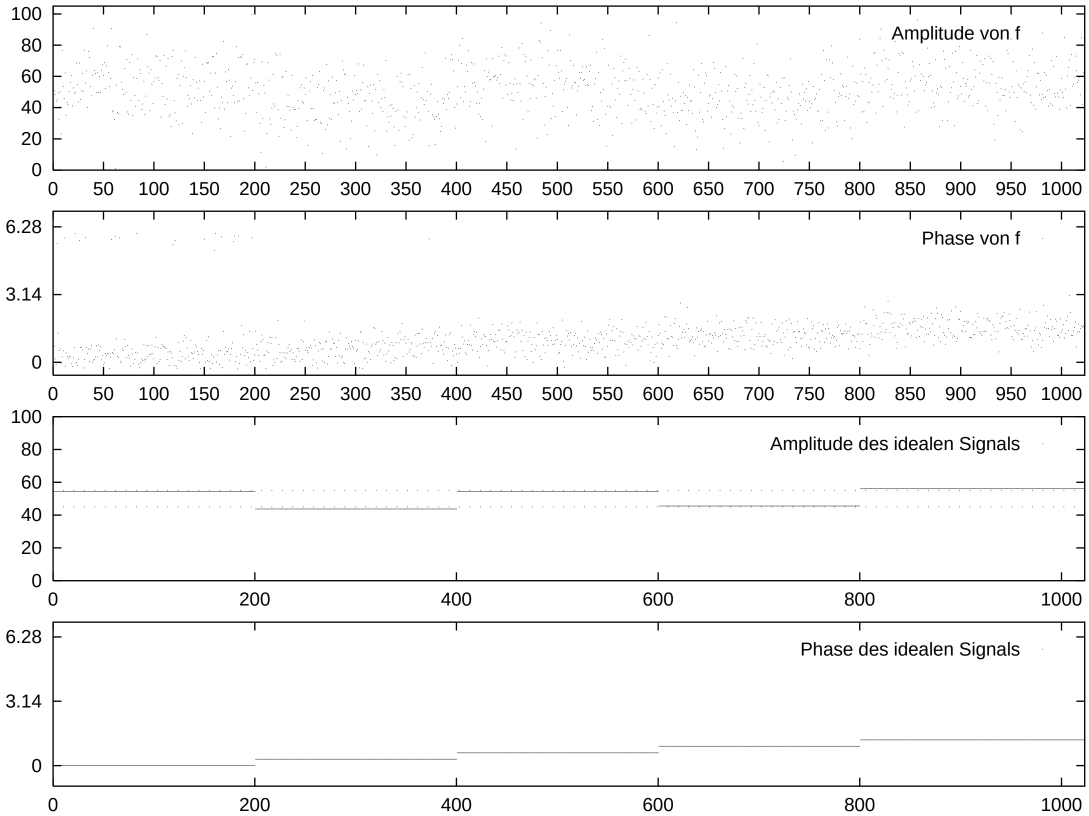



Die Kopplungsdifferenz hat einen Vorzeichenwechsel zwischen 511 und 512. Nach dem ersten Filterschritt kann bereits der Signalsprung markiert werden. Durch einen anschließenden Filterschritt wird das Ergebnis weiter geglättet. Für den zweiten Filterschritt wählen wir die Varianzen $\zeta_{\text{AMP}} = 2.5$, $\zeta_{\text{PHAS}} = 0.25\pi$ und $\eta = 40$.



**Beispiel: Hohes Rauschen**

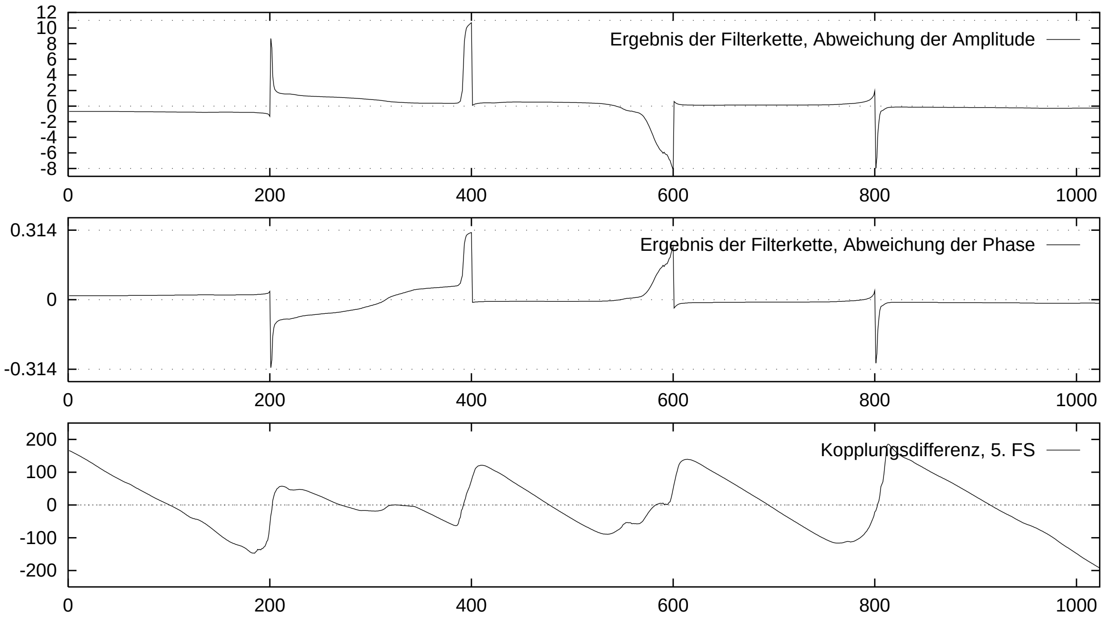
Das folgende Signal der Länge 1024 ist aus einem Signal mit konstanter Amplitude 55.0 und Phase 0 entstanden. An den Stellen 200, 400, 600 und 800 springt die Amplitude um $+-10$ und die Phase um $0.1\pi$. Das Signal ist durch gaußverteiltes Rauschen in Amplitude und Phase gestört mit den Varianzen $\sigma_{\text{AMP}} = 15.0$ und $\sigma_{\text{PHAS}} = 0.15\pi$.



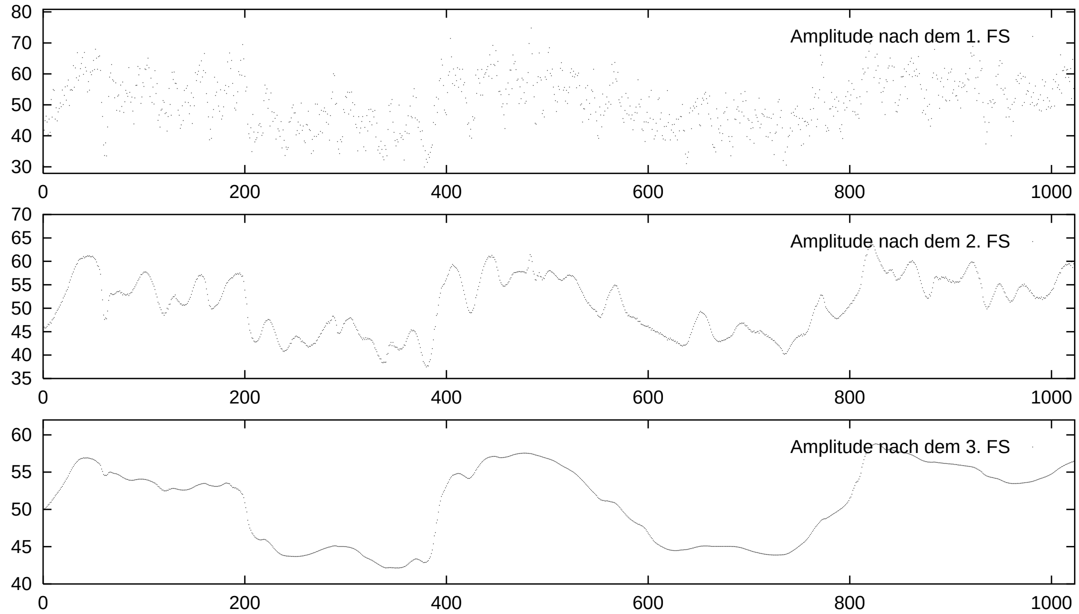

Das Signal-Rausch-Verhältnis, das für ein reelles Signal mit Sprüngen $\leq |H|$ definiert ist durch $R := \frac{|H|}{2\sigma}$, wobei $\sigma^2$ die Rauschvarianz ist, beträgt hier für Amplitude und Phase jeweils $\frac{1}{3}$. Wir starten eine nichtlineare Gaußfilterkette der Länge 5. Wir halbieren die Wertevarianz und vervierfachen die Ortsvarianz nach jedem Filterschritt (Strategie 2.1 mit $\alpha = 2$).

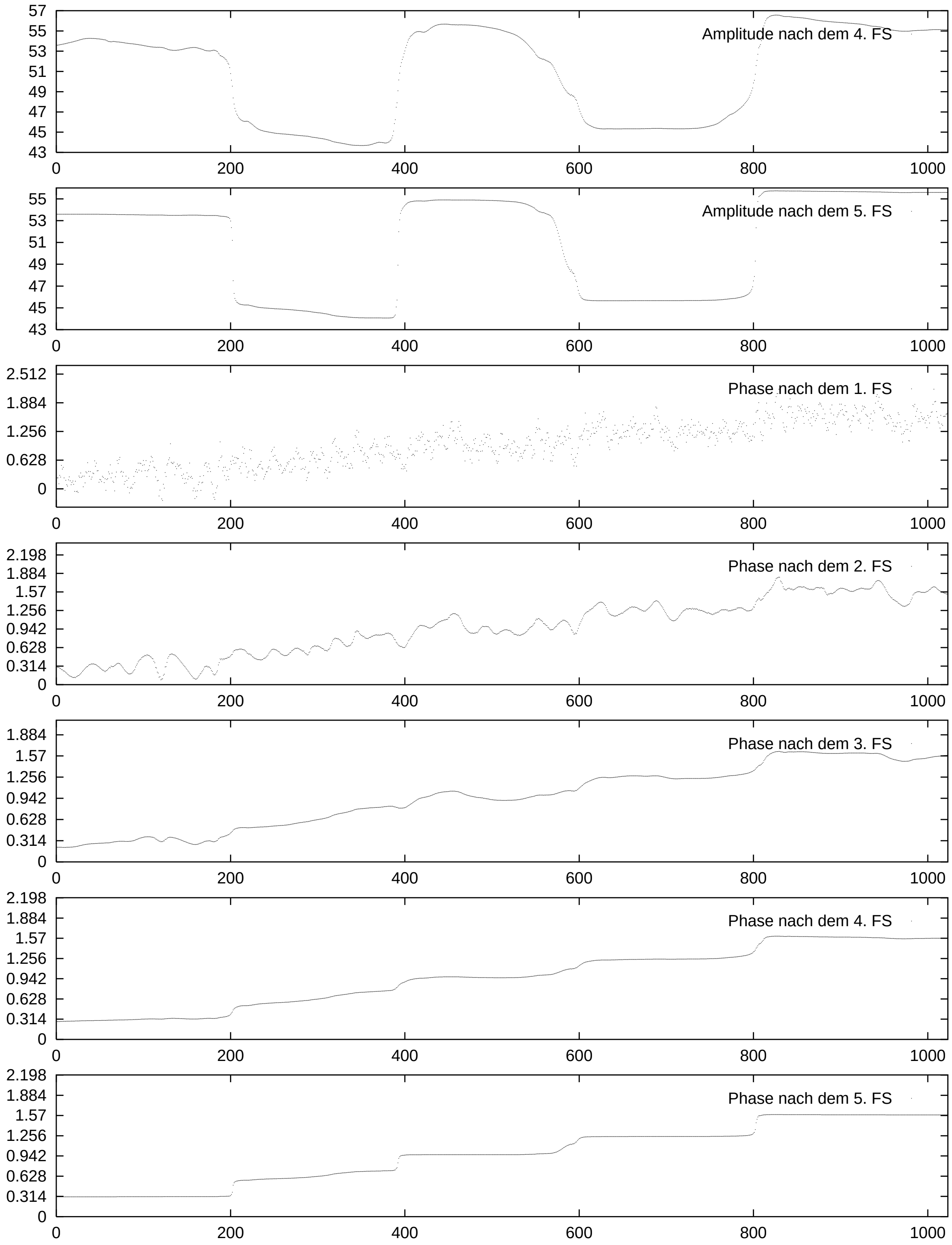
| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 40.0 | 20.0 | 10 | 5 | 2.5 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.4\pi$ | $0.2\pi$ | $0.1\pi$ | $0.05\pi$ | $0.025\pi$ |
| $\eta$ | 1.5 | 6 | 24 | 96 | 384 |

Die Nulldurchgänge der Kopplungsdifferenz im letzten Filterschritt sind außer beim dritten Sprung lokalisierbar, sie liegen zwischen $(201, 202)$, $(390, 391)$, $(801, 802)$. Sie sind also gegenüber den Sprüngen des unverrauschten Signals leicht verschoben. Der dritte Sprung ist anhand der Kopplung nicht eindeutig lokalisierbar: Auf dem Teilintervall $[\![551, 594]\!]$ gibt es zwei Einbrüche der Kopplungen. Abgebildet sind beim Ergebnis der Filterkette die Differenzen der Amplitude bzw. Phase zur Amplitude bzw. Phase des idealen Signals.




Bei den Zwischenergebnissen läßt sich der Effekt beobachten (vergl. [Weu94], Kapitel 4.3), daß Sprünge zunächst verschmiert werden und sich dann in den folgenden Filterschritten wieder aufrichten.




Amplitude nach dem 4. FS
Amplitude nach dem 5. FS
Phase nach dem 1. FS
Phase nach dem 2. FS
Phase nach dem 3. FS
Phase nach dem 4. FS
Phase nach dem 5. FS

# Kapitel 4

# Die Glättung komplexer harmonischer Schwingungen mit Sprüngen

Sei in diesem Abschnitt $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{Z}^n$ eine endliche Teilmenge. Sei $\eta$ die Ortsvarianz des nichtlinearen Gaborfilters. Für alle $t_0 \in D$ nehmen wir – wenn nichts anderes gesagt ist – als Ortsumgebung $U(t_0)$ bei der nichtlinearen Gaborfilterung eines Signals $f\colon D \to \mathbb{C}$, , den Durchschnitt von $D$ und dem Quader mit der Kantenlänge $2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil + 1$ und dem Mittelpunkt $t_0$.

Wir lassen für $n = 1$ somit nur $2 \cdot \lceil 2 \cdot \eta \rceil$ Nachbarwerte in die Mittelung an einer Stelle $t_0$ eingehen.

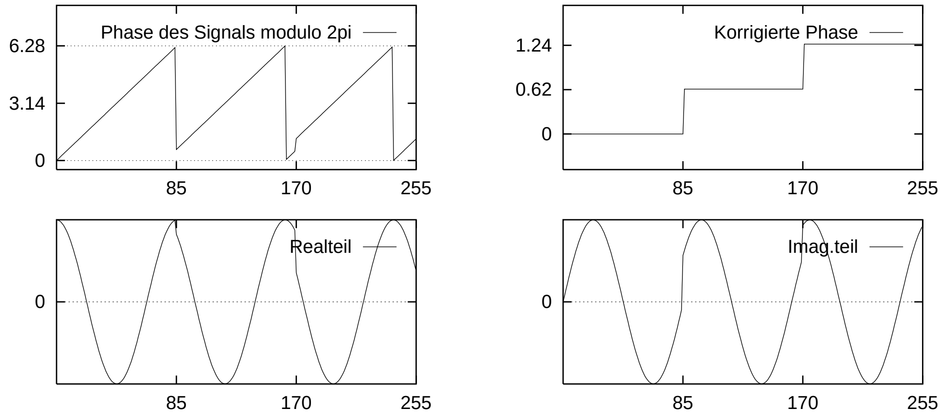
## 4.1 Das nichtlineare Gaborfilter mit konstanter Frequenz

**Definition 4.1** *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ ein Signal mit $D \subset \mathbb{Z}^n$. Für $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in \mathbb{Z}^n$ sei*

$$f_{\omega,t_0}(t) \quad := \quad f(t) \cdot \exp\left(-i \cdot \omega \cdot (t - t_0)\right)$$

*$f_\omega := f_{\omega,0}$ heißt das zur Frequenz $\omega$* **phasenkorrigierte Signal***.*

**Beispiel 4.2** *Abgebildet sind die Werte einer harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz 3. Es hat zwei Sprünge um $0.2\pi$. Die Phase ist zur Signalfrequenz korrigiert.*




Analog zum Gaußfilter erhält man durch Einführung eines Fensters in Werterichtung aus dem linearen Gaborfilter das nichtlineare Gaborfilter.

**Definition 4.3 (Das kartesische nichtlineare Gaborfilter)**
*Seien $\zeta_{\text{WERT}} \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{Z}^n$.*

$$G^{\omega}_{\eta,\zeta_{\text{WERT}}}(f)(t_0) \quad := \quad \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0)} \kappa_{t,t_0} \cdot f_{\omega,t_0}(t)$$

*mit Kopplung* $\kappa_{t,t_0} := g_\eta(\|t - t_0\|) \;\cdot\; g_{\zeta_{\text{WERT}}}(\|f_{\omega,t_0}(t) - f(t_0)\|)$ *und*

$$M(t_0) \quad := \quad \sum_{t \in U(t_0) \cap D} \kappa_{t,t_0}$$

**Definition 4.4 (Das polare nichtlineare Gaborfilter)**
*Seien $\eta, \zeta_{\text{AMP}}, \zeta_{\text{PHAS}} \in \mathbb{R}^+$ und $\omega \in \mathbb{R}^n$. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{Z}^n$.*

$$G^{\omega}_{\eta,\zeta_{\text{AMP}},\zeta_{\text{PHAS}}}(f)(t_0) \quad := \quad r(t_0) \cdot \exp(i \cdot \varphi(t_0))$$

*$r, \varphi\colon D \to \mathbb{R}$ sind definiert durch:*

$$\begin{aligned} r(t_0) \;&:=\; |f(t_0)| \;+\; \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0) \cap D} \kappa_{t,t_0} \cdot (|f(t)| - |f(t_0)|) \\ \varphi(t_0) \;&:=\; \arg f(t_0) \;+\; \frac{1}{M(t_0)} \cdot \sum_{t \in U(t_0) \cap D} \kappa_{t,t_0} \cdot (\arg f_{\omega,t_0}(t) - \arg f(t_0)) \end{aligned}$$

*mit dem Normierungsfaktor* $M(t_0) := \sum_{t \in U(t_0)} \kappa_{t,t_0}$ *und der Kopplung*

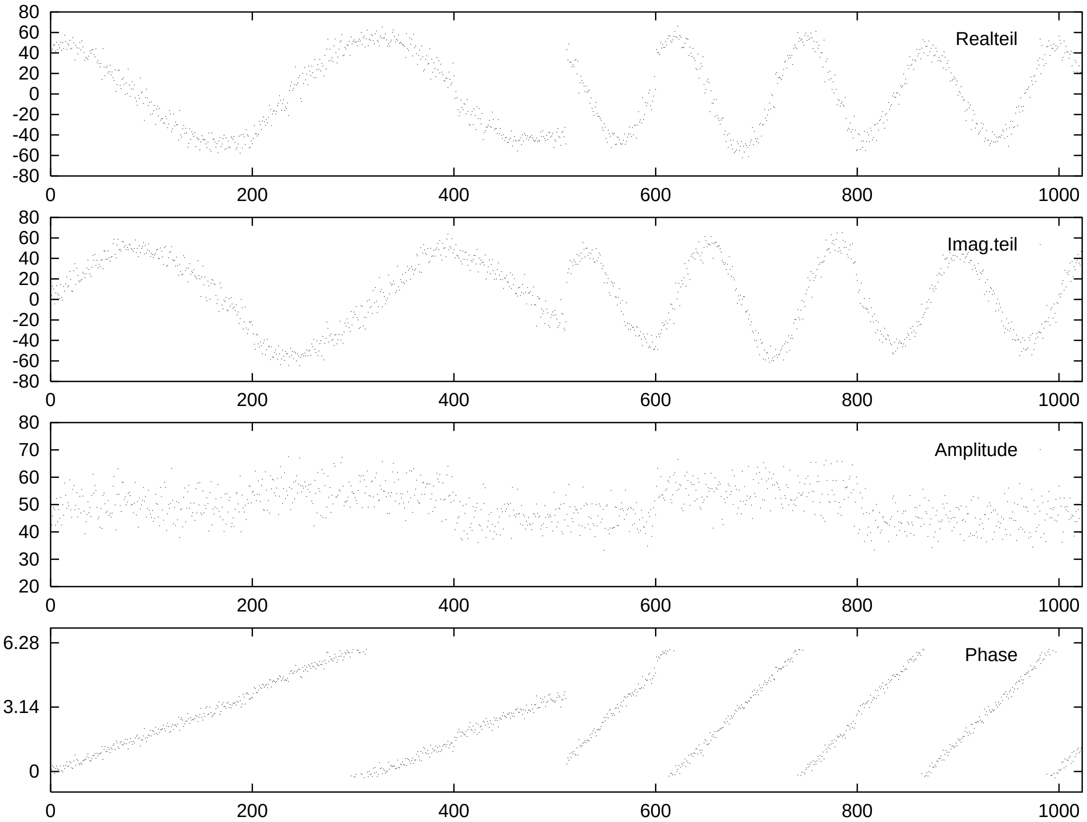
$$\kappa_{t,t_0} \quad := \quad g_\eta(\|t - t_0\|) \;\cdot\; g_{\zeta_{\text{AMP}}}\big(\big|\, |f(t_0)| - |f(t)| \,\big|\big) \cdot\; g_{\zeta_{\text{PHAS}}}(|\arg f_{\omega,t_0}(t) - \arg f(t_0)|)$$

*Die Mittelung der Phase erfolgt wie bei der Definition des polaren nichtlinearen Gaußfilters.*

**Bemerkung 4.5** *Ist $f$ eine harmonische Schwingung, und ist die Frequenz $\omega$ bekannt, so liefert das Gaußfilter, angewendet auf das zur Frequenz $\omega$ phasenkorrigierte Signal $f_{\omega,t_0}$ mit anschließender Phasenkorrektur das gleiche Ergebnis wie das Gaborfilter mit Filterfrequenz $\omega$.*

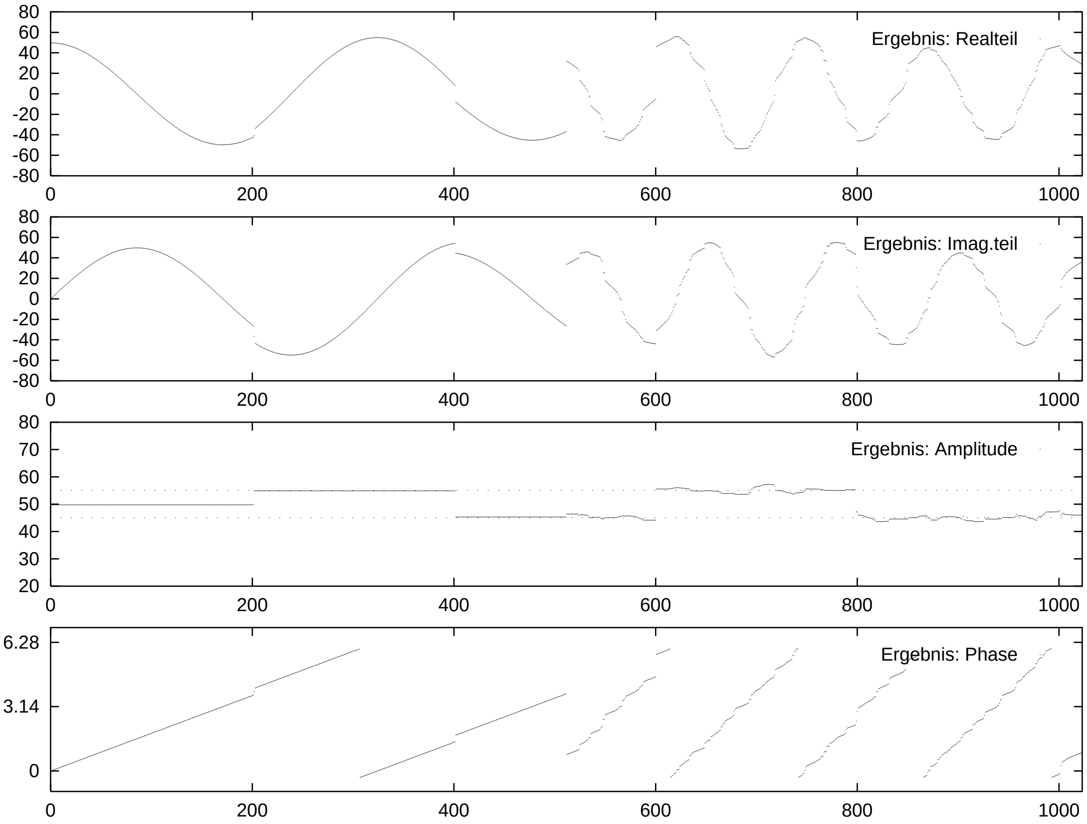
### Ein Beispiel für die Gaborfilterkette

Das folgende Signal mit Amplitude 55 hat auf dem linken Teilintervall $[\![1, 512]\!]$ die Frequenz 3 und auf dem rechten Intervall $[\![513, 1024]\!]$ die Frequenz 8. An der Stelle 512 ist ein Phasensprung um $0.5\pi$ entstanden. Das Signal hat an den Stellen 200, 400, 600 und 800 Sprünge. Die Amplitude springt von 50 auf 55, auf 45, 55, 45. Die Phase springt um jeweils $0.1\pi$. Das Signal ist durch gaußverteiltes Rauschen in Amplitude und Phase gestört mit den Varianzen $\sigma_{\text{AMP}} = 5.0$ und $\sigma_{\text{PHAS}} = 0.05\pi$.

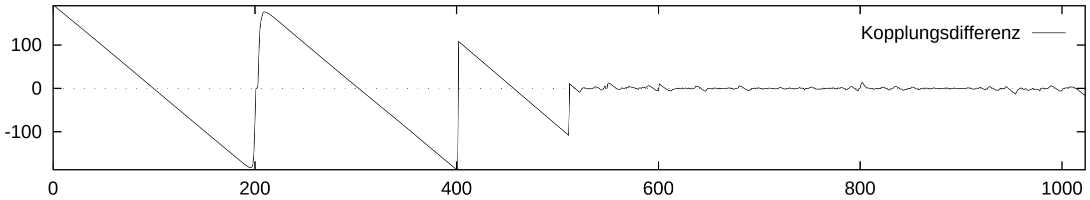



Eine Filterkette mit der Länge 5, der Filterfrequenz 3 liefert folgende Ergebnisse:

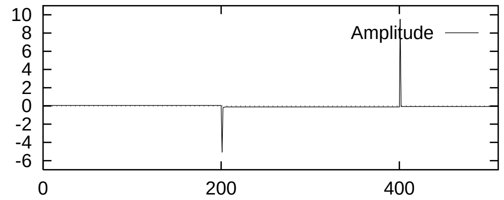
| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 15.0 | 7.5 | 3.75 | 1.88 | 0.94 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.15\pi$ | $0.075\pi$ | $0.038\pi$ | $0.019\pi$ | $0.09\pi$ |
| $\eta$ | 2 | 8 | 32 | 128 | 512 |

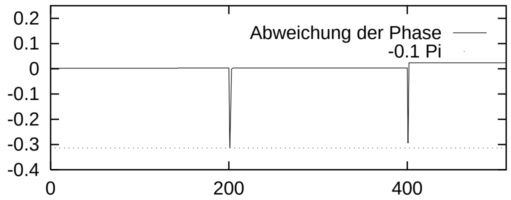



Im linken Teilintervall wurde sprungerhaltend geglättet. Da im rechten Teilintervall die Filterfrequenz nicht der Signalfrequenz entspricht, werden falsch phasenkorrigierte Werte gemittelt und das Filter koppelt schlecht. Die Sprünge werden durch das Differenzenfilter an den Stellen 200 oder 201 (nicht eindeutig) und 401 markiert.




Abgebildet ist die Abweichung der Amplitude und Phase vom unverrauschten Signal auf dem linken Teilintervall:



## 4.2 Das nichtlineare Gaborfilter mit variabler Frequenz

Die Filterfrequenz beim nichtlinearen Gaborfilter muß lokal variieren, falls die Signalfrequenz nicht konstant ist. Dazu ändern wir die Definition 4.1 wie folgt ab: Wir ersetzen $\omega \in \mathbb{R}$ durch $\omega\colon D \to \mathbb{R}$ für Signale mit Definitionsbereich $D$.

**Definition 4.6** *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ ein Signal mit $D \subset \mathbb{Z}^n$. Für $\omega\colon D \to \mathbb{R}$ und $t_0 \in \mathbb{Z}^n$ sei*

$$f_{\omega,t_0}(t) \quad := \quad f(t) \cdot \exp\left(-i \cdot \omega(t_0) \cdot (t - t_0)\right)$$

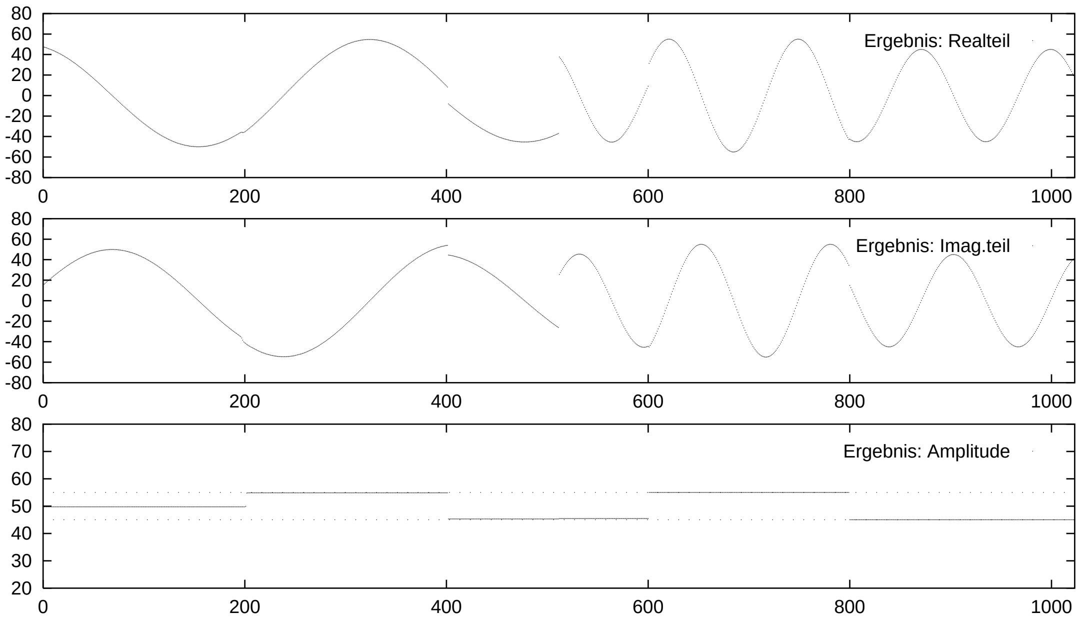
*$f_\omega := f_{\omega,0}$ heißt das zur* **variablen Frequenz $\omega$ phasenkorrigierte Signal***.*

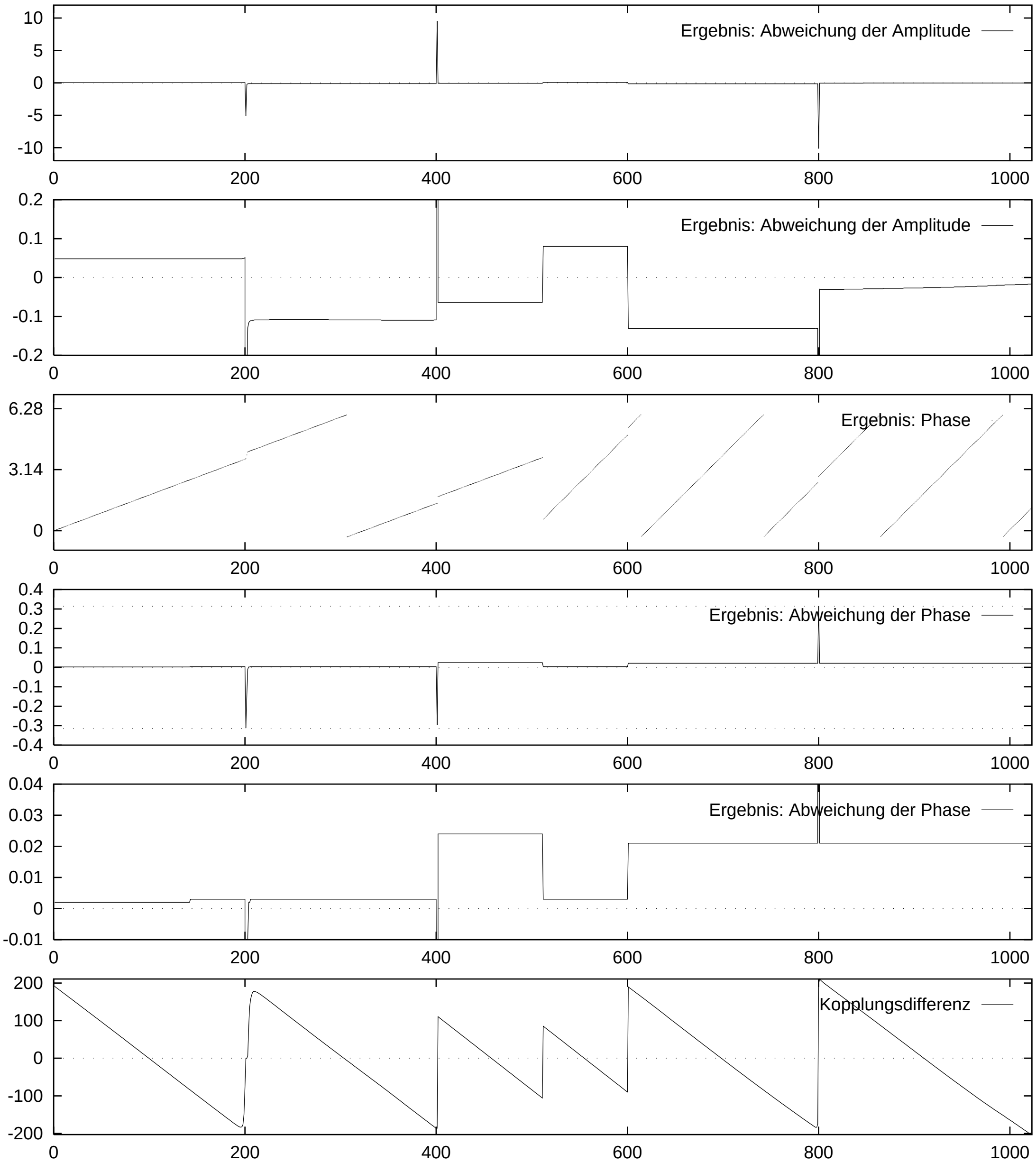
### Ein Beispiel für die Gaborfilterkette mit variierender Filterfrequenz

Wir filtern das Beispiel aus Abschnitt 4.1, das einen Frequenzsprung an der Stelle 512 von 3 auf 8 hat, mit einer Filterkette der gleichen Länge und den gleichen Parametern wie in Abschnitt 4.1.

| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 15.0 | 7.5 | 3.75 | 1.88 | 0.94 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.15\pi$ | $0.075\pi$ | $0.038\pi$ | $0.019\pi$ | $0.09\pi$ |
| $\eta$ | 2 | 8 | 32 | 128 | 512 |

Als Filterfrequenz wählen wir die Signalfrequenz. Wir erhalten folgendes Ergebnis:

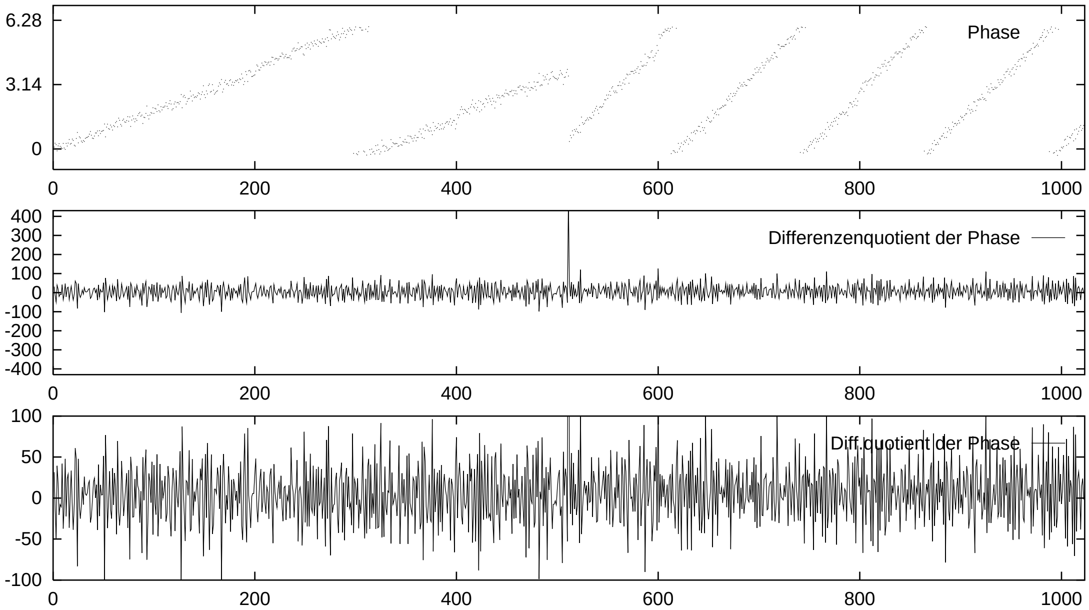





Die Sprünge werden durch das Differenzenfilter an den Stellen 200, 401, 511, 600 und 799 markiert.

### 4.2.1 Die Schätzung der Signalfrequenz

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, das den Frequenzverlauf in verrauschten harmonischen Schwingungen schätzt. Bei einem kontinuierlichen unverrauschten Signal $f\colon [0,l] \to \mathbb{C}$ ist die Frequenz bis auf den Faktor $\frac{2\pi i}{l+1}$ die Ableitung der Phase. Bei diskreten verrauschten Signalen ist ein Differenzenquotient der Phase eine schlechte Schätzung, wenn das Signal Phasensprünge hat, da diese Ausreißer hervorrufen, wie es bei diesem Beispiel der Fall ist. Der Phasensprung an der Stelle 512 um $\pi$ erzeugt einen Ausreißer beim Differenzenquotient der Phase.




Anhand dieses Beispiels werden wir erläutern, wie wir vorgehen, um eine Schätzung der Signalfrequenz für das nichtlineare Gaußfilter zu erhalten. Dazu wird der Differenzenquotient der Phase nichtlinear geglättet. Ein wesentlicher Schritt besteht dabei in einer Elimination der durch Phasensprünge verursachten Ausreißer, da diese nicht in die Frequenzschätzung eingehen dürfen. Dafür ist das folgende Filter geeignet:

**Definition 4.7** *Sind $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$, so ist der* **Median** *der Folge der Wert, der bei aufsteigender Sortierung der Folge an der $(n+1)$-ten Stelle, also in der Mitte, steht.*

**Frequenzschätzung 4.8**
*Die folgende Frequenzschätzung, die in 4 Schritten erfolgt, hat sich bei den Experimenten bewährt. Man bildet den vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten der Phase modulo $2\pi$.*

1. *Dieser wird nichtlinear geglättet durch ein nichtlineares Gaußfilter mit der Ortsvarianz $\eta = 30$ und Wertevarianz $\zeta_{\text{WERT}} = 30$, um große Störungen zu eliminieren.*

2. *Wir glätten dieses Zwischenergebnis durch eine Median-Operation mit Anzahl der Nachbarn gleich 100 $(n = 50)$. Dabei werden einzelne Ausreißer abgeschnitten.*

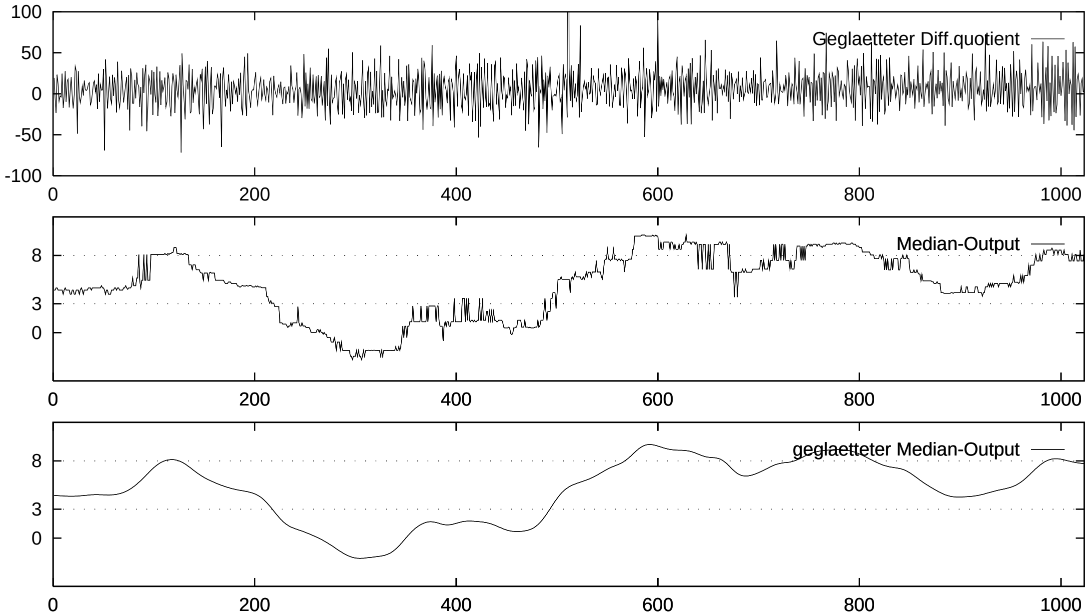
3. *Es folgt eine Glättung durch ein nichtlineares Gaußfilter mit der Ortsvarianz* $\eta = 10$ *und Wertevarianz* $\zeta_{\text{WERT}} = 30$.

*Diese abschließende starke Glättung ist sinnvoll, da ein Zappeln der Filterfrequenz eine starke Verschlechterung des Filterergebnisses bewirkt.*

**Parameterwahl 4.9** *Die folgende Wahl der Parameter hat sich bei der Frequenzschätzung 4.8 bewährt.*

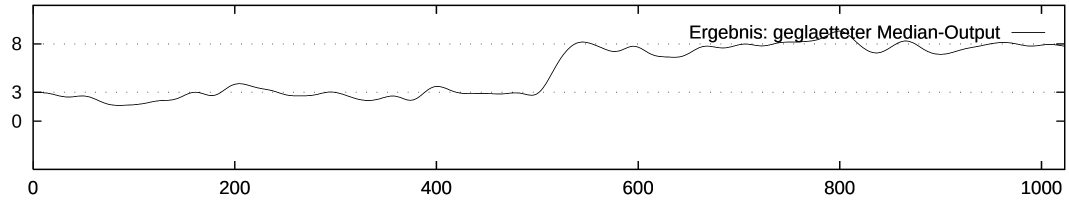
| | | |
|---|---|---|
| *1. Schritt* | $\eta = 30$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 30$ |
| *2. Schritt* | $n = 50$ | |
| *3. Schritt* | $\eta = 10$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 30$ |

Mit dieser Parameterwahl erhalten wir für das obige Beispiel folgende Ergebnisse bei der Frequenzschätzung:




Mit dieser Frequenzschätzung machen wir einen nichtlinearen Filterschritt mit den Parametern $\eta = 2$, $\zeta_{\text{AMP}} = 15$, $\zeta_{\text{PHAS}} = 0.15\pi$. Wir schätzen aus dem Filterergebnis erneut die Frequenz. Da das Phasenrauschen reduziert ist, wählen wir kleinere Parameter für die Varianzen bei der nichtlinearen Frequenzschätzung aus der Phase.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Schritt | $\eta = 30,$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 3$ |
| 2. Schritt | $n = 10,$ | |
| 3. Schritt | $\eta = 10,$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 10$ |




Diese Frequenzschätzung stimmt jetzt besser mit der tatsächlichen Signalfrequenz überein. Daher wiederholen wir den ersten Filterschritt erneut mit denselben Parametern, allerdings mit der verbesserten Frequenzschätzung als Filterfrequenz.

Wir haben somit einen Vorfilterschritt eingeführt, der nur dazu dient, die Frequenzschätzung für den Start der Filterkette zu verbessern.

**Strategie 4.1 (Frequenzschätzung für die Filterkette mit Vorfilterschritt)** *Seien $\zeta_{\text{WERT}}$, $\zeta_{\text{AMP}}$ und $\zeta_{\text{PHAS}}$ die Parameter für den ersten Filterschritt der nichtlinearen Gaborfilterkette mit den Stufen $m = 1, \ldots, k$. Wir gewinnen die Filterfrequenz aus dem Differenzenquotienten der Phase durch die Frequenzschätzung 4.8 in jeweils drei Schritten.*

$m = 0$ **Vorfilterschritt**

*Der Vorfilterschritt ist ein nichtlineares Gaborfilter mit den Parametern $\zeta_{\text{WERT}}$, $\zeta_{\text{AMP}}$ und $\zeta_{\text{PHAS}}$ und dient der Schätzung der Startfrequenz der Filterkette. Wähle für die Frequenzschätzung für den Vorfilterschritt folgende Parameter:*

| | | |
|---|---|---|
| *1. nlin. Gaußfilter* | $\eta = 30$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 30$ |
| *2. Median* | $n = 50$ | |
| *3. nlin. Gaußfilter* | $\eta = 10$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 30$ |

$m > 1$ **Filterkette**

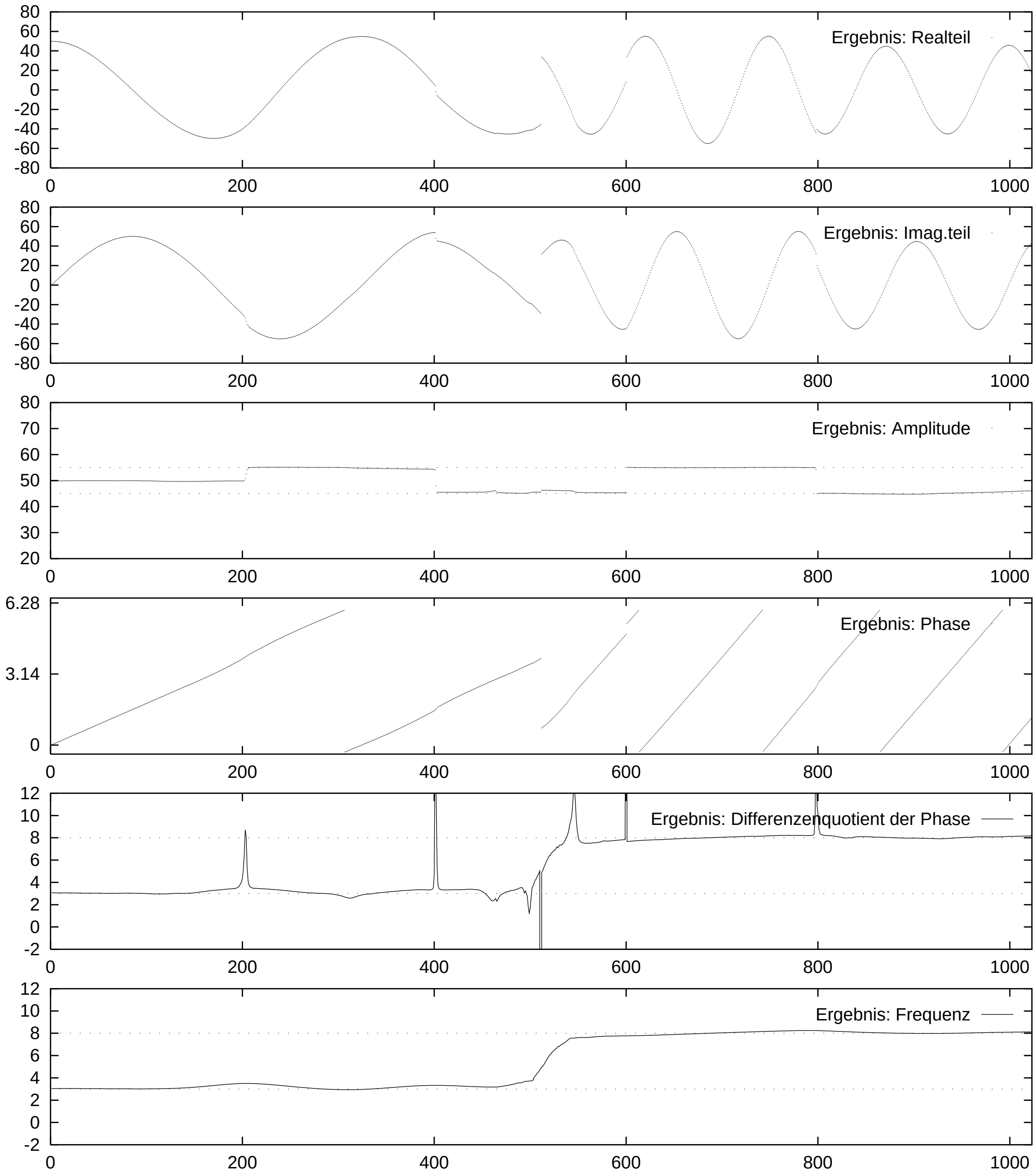
*Nach dem $(m-1)$-ten Filterschritt schätzen wir die Frequenz erneut aus der Phase und nehmen diese Schätzung als Filterfrequenz für den $m$-ten Filterschritt. Die Schätzung erfolgt mit den Parametern*

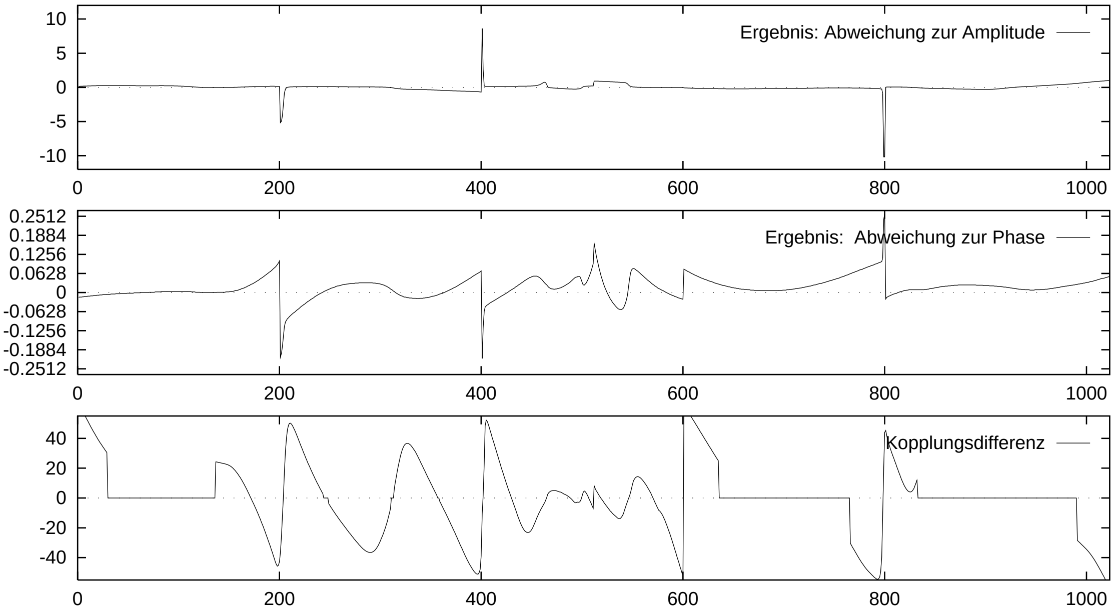
| | | |
|---|---|---|
| *1. nlin. Gaußfilter* | $\eta = 30$ | $\zeta_{\text{WERT}} = 3$ |
| *2. Median* | $n = 10$ | |
| *3. nlin. Gaußfilter* | $\eta = 10 \cdot m$ | $\zeta_{\text{WERT}} = \frac{10}{m}$ |

*Mit jeder Filterstufe verändern wir die Parameter für die abschliessende Glättung der geschätzten Frequenz.*

## 4.3 Beispiele

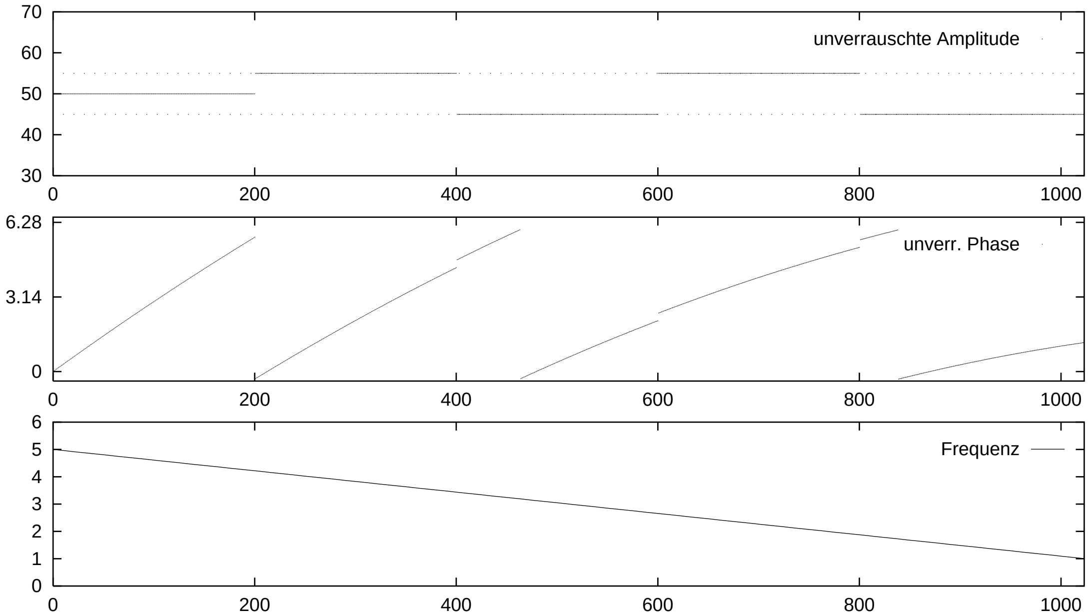
**Beispiel 1 zur nichtlinearen Gaborfilterkette mit Frequenzschätzung 4.1** Wir filtern das obige Beispiel (das verrauschte Signal, das in der linken Intervallhälfte die Frequenz 3 und in der rechten Intervallhälfte die Frequenz 8 hat) mit einer nichtlinearen Filterkette mit denselben Parametern wie zu Beginn von Abschnitt 4.2, wobei wir die Filterfrequenz gemäß Strategie 4.1 schätzen.



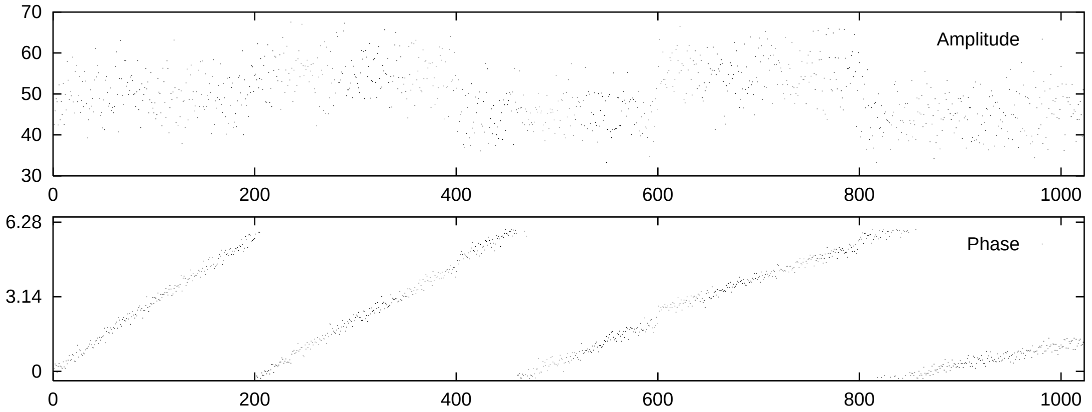



An den Stellen 203, 401, 600, 512 und 798 werden Signalsprünge durch die Kopplungsdifferenz markiert.

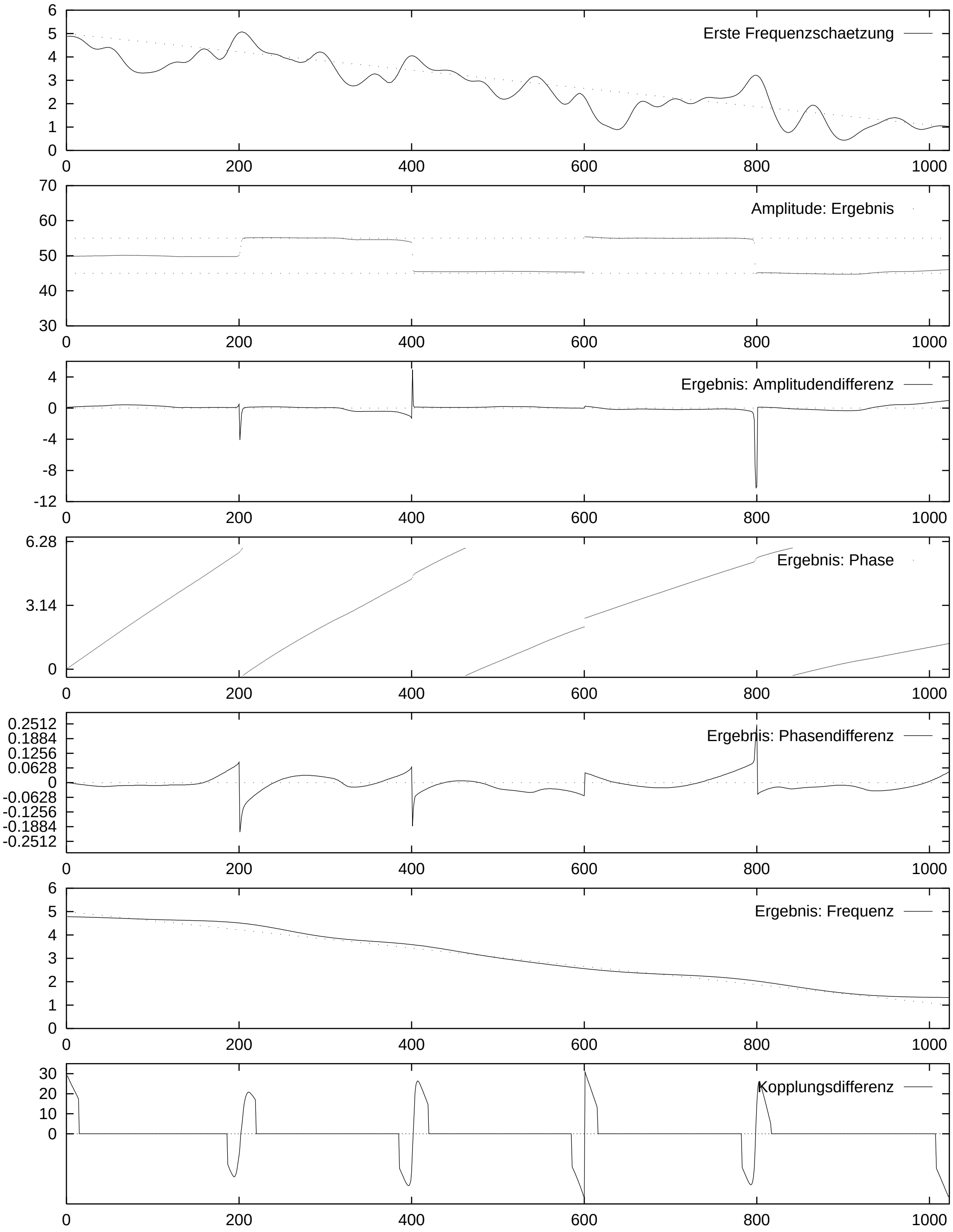
**Beispiel 2 zur nichtlinearen Gaborfilterkette mit Frequenzschätzung 4.1**
Beim folgenden Signal nimmt die Frequenz linear von 5 auf 1 ab. Es hat an den Stellen 200, 400, 600 und 800 Sprünge. Die Amplitude springt von 50 auf 55, auf 45, 55, 45 und die Phase um jeweils $0.1\pi$.




Das Signal ist durch gaußverteiltes Rauschen in Amplitude und Phase gestört mit den Varianzen $\sigma_{\text{AMP}} = 5.0$ und $\sigma_{\text{PHAS}} = 0.05\pi$. Wir filtern das verrauschte Signal mit einer nichtlinearen Filterkette, wobei wir die Filterfrequenz gemäß Strategie 4.1 schätzen. Zum Vergleich ist auch die erste Frequenzschätzung (für den Vorfilterschritt) abgebildet.




| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 15.0 | 7.5 | 3.75 | 1.88 | 0.94 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.15\pi$ | $0.075\pi$ | $0.038\pi$ | $0.019\pi$ | $0.09\pi$ |
| $\eta$ | 2 | 8 | 32 | 128 | 512 |




An den Stellen 201, 401, 600 und 798 werden Sprünge markiert.

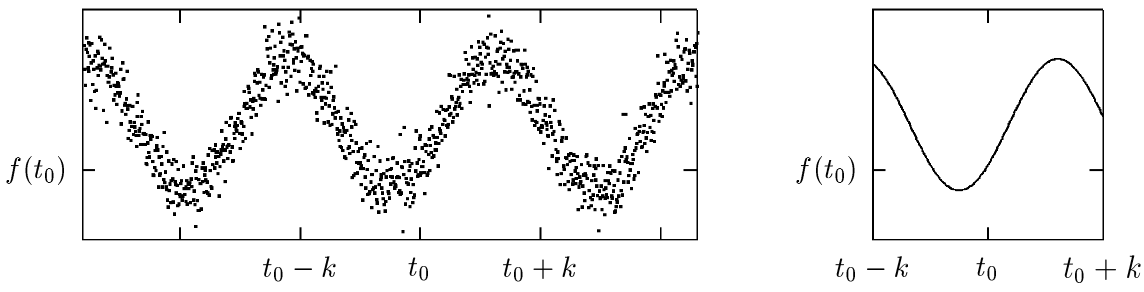
# Kapitel 5

# Die Glättung reeller harmonischer Schwingungen mit Sprüngen

**Definition 5.1** *Den Realteil einer komplexen, harmonischen Schwingung (mit Sprüngen) bezeichnen wir als* **reelle, harmonische Schwingung** *(mit Sprüngen). Eine verrauschte, reelle, harmonische Schwingung entsteht daraus durch Addition eines Störterms wie in Definition 1.26. Unter der Amplitude einer reellen, harmonischen Schwingung verstehen wir die Amplitude der zugehörigen komplexen, harmonischen Schwingung.*

In diesem Kapitel wird ein Weg aufgezeigt, eine verrauschte reelle, harmonische Schwingung sprungerhaltend zu glätten. Dabei setzen wir voraus, daß sich die Amplitude und die Frequenz der zugrundeliegenden komplexen harmonischen Schwingung zwischen den Sprüngen nur langsam ändern.

**Bemerkung 5.2** *Sei $D$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir wollen in einer verrauschten reellen, harmonischen Schwingung $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren Amplitude und Periodenlänge bekannt ist, die Störungen eliminieren, indem wir $2 \cdot k$ Nachbarwerte in eine nichtlineare Mittelung eingehen lassen.*




*Wir müssen dazu für alle $t_0 \in D$ auf dem Teilintervall $[\![t_0-k, t_0+k]\!] \cap D$ zunächst den Signalverlauf der entsprechenden unverrauschten Schwingung schätzen, die an der*

*Stelle $t_0$ gerade den Wert $f(t_0)$ hat. Die Differenz von verrauschtem Signal und der entsprechenden unverrauschten Schwingung gibt uns dann die Abweichungen an, die durch eine nichtlineare Mittelung an der Stelle $t_0$ gewichtet gemittelt werden können.*

*Diese Schätzung ist äquivalent mit einer Schätzung der Phase auf D. Da die Schätzung des Phasenverlaufes der Ergänzung eines Imaginärteiles entspricht, ist das Glätten einer reellen Schwingung äquivalent dazu, zu der reellen, harmonischen Schwingung einen Imaginärteil zu ergänzen und das komplexe Signal zu glätten.*

Wir gehen so vor, daß wir zu einem gegebenen Signal einen Imaginärteil geeignet ergänzen. Das auf diese Weise erhaltene komplexe Signal wird mit einer nichtlinearen Gaborfilterkette gefiltert. Sprungstellen, Frequenz und Amplitude werden nicht a priori als bekannt vorausgesetzt, sondern durch das Verfahren geschätzt.

## 5.1 Die Ergänzung eines Imaginärteils

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $f$ eine unverrauschte, reelle, harmonische Schwingung ohne Sprünge ist, also $f(t) = \Re(r \cdot \exp(i\omega t + i\varphi_0)) = r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ und $r > 0$. Dann gilt auch $f(t) = \Re(r \cdot \exp(-(i\omega t + i\varphi_0)))$; es gibt also zwei Imaginärteile, die $f$ zu einer komplexen, harmonischen Schwingung ergänzen. Die Amplitude ist gleich den Maximalwerten von $f$, und die Periodenlänge $\frac{1}{|\omega|}$ ist gleich dem Abstand benachbarter Maximumstellen (oder dem doppelten Abstand der Nullstellen) von $f$. Das Vorzeichen von $\omega$ ist durch $f$ nicht festgelegt. Wenn $r$ und $\omega$ nicht konstant sind, aber über eine Periodenlänge hinweg nicht nennenswert variieren, so erhält man auf analoge Weise gute lokale Näherungswerte von $r$ und $\omega$. In der Nähe von Sprungstellen können diese Schätzwerte stark fehlerhaft werden.

Schwieriger wird die Situation, wenn statt $f$ nur eine additiv verrauschte Version $\tilde{f}$ vorliegt. Dann versucht man, eine verrauschte Version $\tilde{F}$ einer komplexen, harmonischen Schwingung $F$ zu konstruieren, deren Realteil $\tilde{f}$ ist. Die Störterme von $\tilde{f}$ können dabei durch Störungen der Amplitude von $F$ oder der Phase von $F$ oder durch Störungen beider Größen erzeugt werden. Wir werden zwei Fälle betrachten, zum einen, daß die Amplitude von $F$ nahezu konstant ist und daß die Störungen von $\tilde{f}$ nur durch Störungen der Phase von $F$ erzeugt werden; zum anderen, daß die Phase von $F$ nahezu linear ist und die Störungen von $\tilde{f}$ nur durch Störungen der Amplitude erzeugt werden.

## 5.2 Die Ergänzung bei langsam variierender Amplitude

Bei einer kontinuierlichen, unverrauschten, reellen harmonische Schwingung ohne Sprünge ist das Betragsmaximum gerade die Amplitude. Wir ersetzen bei verrauschten, diskreten, harmonischen Schwingungen das globale Maximum durch ein lokales Maximum über eine geeignet große Umgebung, wobei wir uns an der Periodenlänge orientieren. Dazu schätzen wir die Periodenlänge bzw. die Frequenz aus den Nulldurchgängen des Signals. Die Frequenzschätzung aus den Nullstellen, angewendet auf den Realteil einer harmonischen Schwingung der Frequenz $\omega$ liefert dasselbe Ergebnis, wenn $\omega$ durch $-\omega$ ersetzt wird. Wir setzen daher im folgenden stets voraus, daß die gesuchte Frequenz positiv ist.

**Frequenzschätzung 5.3** *Sei $f\colon [\![1,l]\!] \to \mathbb{R}$. Seien $t_1,\ldots,t_n$ die Nulldurchgänge von $f$ mit $t_0 := 1 < t_1 < \cdots < t_{n+1} =: l$, d.h. $f(t_j) <= 0$ und $f(t_j+1) > 0$. Wir setzen für $t \in [\![t_1, t_{n-1}[\![$ und $j = 1,\ldots,n-1$*

$$\begin{aligned} \mathbf{period}_f|_{[\![t_j,t_{j+1}[\![}(t) &:= 2\cdot(t_{j+1}-t_j) \\ \mathbf{freq}_f(t) &:= \frac{\mathbf{period}_f(t)}{l} \end{aligned}$$

*und setzen $\mathbf{period}_f$ und $\mathbf{freq}_f$ auf $[\![1, t_1-1]\!]$ und $[\![t_n, l]\!]$ durch die Werte an den Stellen $t_1$ bzw. $t_{n-1}-1$ fort. Wir bezeichnen $\mathbf{period}_f$ als Schätzung der Periodenlänge und $\mathbf{freq}_f$ als Frequenzschätzung aus $f$.*

Eine leichte Glättung des verrauschten Signals vor der Frequenzschätzung reduziert die Zahl eventuell vorhandener eng benachbarten Nulldurchgänge, die durch Rauschen verursacht wurden.

**Bemerkung 5.4** *Zwischen zwei benachbarten Nulldurchgängen in einem Signal ist das Ergebnis einer Frequenzschätzung nach 5.3 stets konstant. Durch diese Vorgehensweise können Frequenzsprünge nicht genau lokalisiert werden, es sei denn, sie treffen mit Nulldurchgängen zusammen.*

**Amplitudenschätzung 5.5** *Sei $f\colon [\![1,l]\!] \to \mathbb{R}$. Wir setzen für $t \in [\![1,l]\!]$*

$$\mathbf{amp}_f(t) \quad := \max_{t\in U(t)\cap[\![1,l]\!]} \{|f(t)|\}$$

*und bezeichnen $\mathbf{amp}_f(t)$ als Amplitudenschätzung aus $f$ an der Stelle $t$ bezüglich $U(t)$. Die Wahl der Umgebung $U(t)$ sollte so erfolgen, daß $f$ in $U(t)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Betragsmaximum hat. Daher setzen wir*

$$U(t) \quad := \quad [\![t - \mathbf{period}_f(t), t + \mathbf{period}_f(t)]\!]$$

Je stärker das reelle Signal verrauscht ist, um so größer wird die Amplitudenschätzung. In der Praxis hat es sich besonders bei Gaußrauschen als zweckmäßig erwiesen, das reelle Signal zuvor leicht zu glätten, um zu verhindern, daß durch einzelne betragsmäßige Ausreißer die Amplitudenschätzung zu sehr nach oben abweicht.

Liegt zusätzlich zum Signalwert $f(t) \neq 0$ des Realteils eine Amplitudenschätzung $\mathbf{amp}_f(t)$ an einer Stelle $t$ vor, gibt es für die Ergänzung eines Imaginärteils bzw. der Phase die beiden Möglichkeiten

$$
\begin{aligned}
\Im_+(t) &:= \sqrt{\mathbf{amp}_f(t)^2 - f(t)^2} & \qquad \varphi_+(t) &:= \arctan\left(\frac{\Im_+(t)}{f(t)}\right) \\
\Im_-(t) &:= -\sqrt{\mathbf{amp}_f(t)^2 - f(t)^2} & \qquad \varphi_-(t) &:= \arctan\left(\frac{\Im_-(t)}{f(t)}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Mehrdeutigkeit lösen wir mit einem linearen Gaborfilter $G_\eta^{\omega,\text{LIN}}$ mit variabler Filterfrequenz $\omega := \mathbf{freq}_f$ auf.

**Phasenschätzung 5.6** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt: Wir wählen den Wert von $\varphi_+(t)$ und $\varphi_+(t)$, der modulo $2\pi$ näher an der Phase des linearen Gaborfilteroutputs liegt.*

$$
\varphi_f(t) \quad := \quad \begin{cases} \varphi_+(t) & \textit{falls } |\arg\ G_\eta^{\omega,\text{LIN}}(t) - \varphi_+(t)| \leq |\arg G_\eta^{\omega,\text{LIN}}(t) - \varphi_-(t)| \\ \varphi_-(t) & \textit{sonst} \end{cases}
$$

*$\varphi_f$ heißt die mit $\mathbf{amp}_f$ aus dem Gaborfilteroutput mit der Frequenz $\mathbf{freq}_f$ geschätzte Phase zu $f$.*

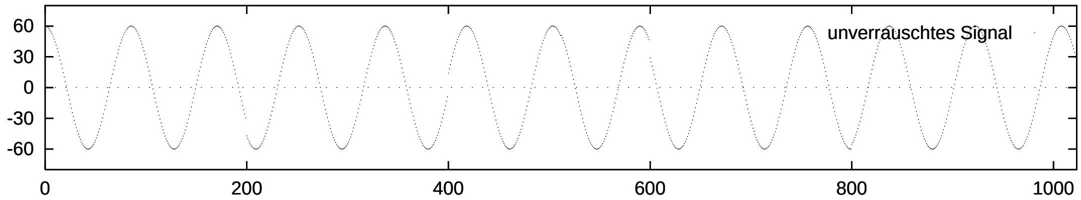
Ist das Signal $f$ der Realteil einer leicht verrauschten (d.h. geringe Rauschamplitude), komplexen, harmonischen Schwingung, deren Amplitude nur langsam variiert und deren Phase annähernd linear verläuft, so liefert die oben vorgestellte Vorgehensweise eine gute Näherung des Imaginärteils. Je verrauschter das relle Signal $f$ ist, um so verrauschter wird die geschätzte Phase $\varphi_f$. Hat das Signal Sprünge, ergeben sich besondere Probleme bei der Ergänzung eines Imaginärteils, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

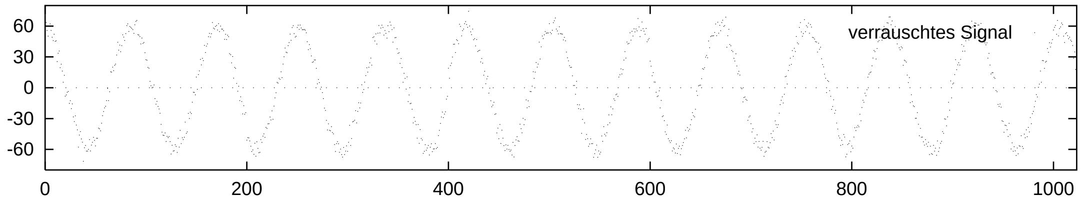
### 5.2.1 Beispiel: Signalsprünge

Anhand eines Beispiels wird das Verfahren vorgestellt, nach dem wir unter der Annahme, daß das Signal zu einer komplexen Schwingung mit annähernd konstanter Amplitude ergänzt werden kann, einen Imaginärteil konstruieren. Wir schätzen Amplitude und Frequenzverlauf, um anschließend einen Imaginärteil zu ergänzen.

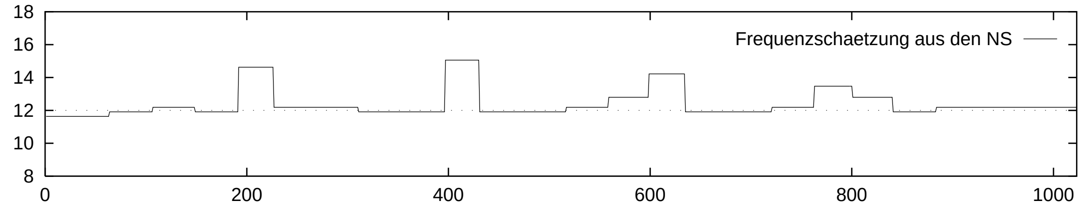
$$
\text{Realteil} \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Frequenzschätzung} \\ \text{Periodenschätzung} \\ \text{Amplitudenschätzung} \end{array} \right. \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Phasenschätzung} \\ \text{Imag.teilschätzung} \end{array} \right.
$$

Das folgende Signal ist der Realteil der harmonischen Schwingung der Frequenz 12 und Amplitude 60. Es hat an den Stellen 200, 400, 600 und 800 durch Phasensprünge um $0.1\pi$ verursachte Sprünge. Der Realteil wird verrauscht mit Gaußrauschen der Standardabweichung $\sigma_{\text{RAUSCH}} = 5$.

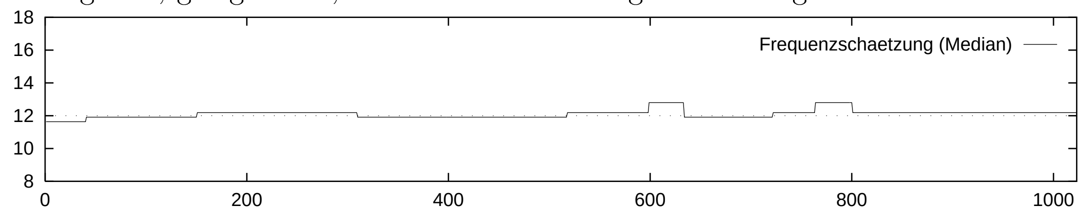


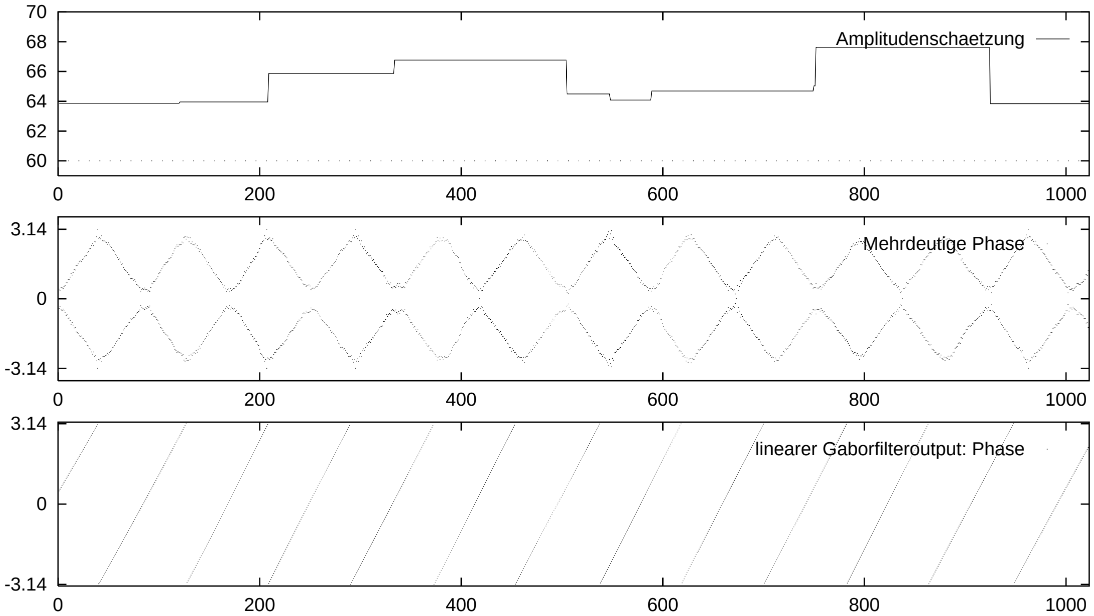

Die Frequenz bzw. die Amplitude des unverrauschten komplexen Signals sind im folgenden zur besseren Orientierung mit eingezeichnet. Wir glätten das verrauschte Signal leicht durch eine lokale lineare Mittelung, bei der die beiden Nachbarwerte eingehen. Eine Frequenzschätzung gemäß 5.3 liefert folgende Schätzung für den Frequenzverlauf aus den Nulldurchgängen des Signals:



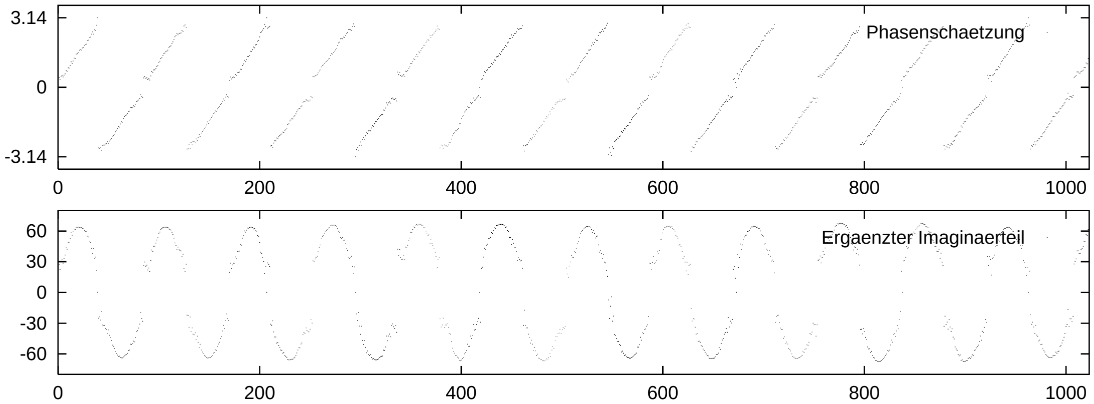

Da wir den Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen als halbe Periodenlänge interpretieren, verursachen die Signalsprünge kürzere Perioden und somit eine höhere Schätzung der Frequenz in der Nähe der Sprungstellen 200, 400, 600 und 800. Es hat sich gezeigt, daß eine lokale Median-Operation, angewendet auf die Frequenzschätzung aus den Nulldurchgängen, bei der $\max\{50, 2\cdot\mathbf{period}_f(t)\}$ Nachbarwerte eingehen, geeignet ist, um diese Abweichungen zu korrigieren:



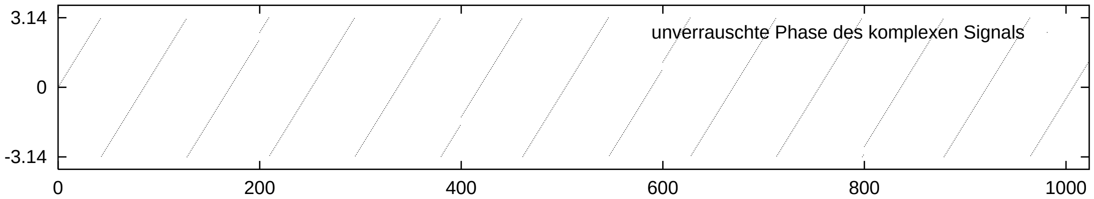

Mit dieser Schätzung der Periodenlänge schätzen wir die Amplitude gemäß 5.5. Mit der Amplitudenschätzung berechnen wir bis auf Mehrdeutigkeit die Phase. Parallel dazu berechnen wir den Gaborfilteroutput des Signals mit der lokal variierenden Frequenz $\omega = \mathbf{freq}_f$.



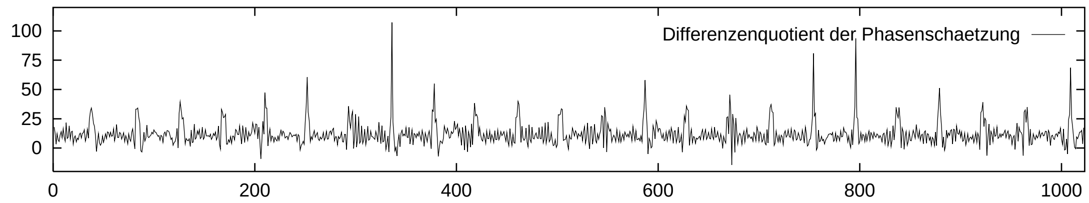

Die Sprünge sind im Gaborfilterergebnis verschmiert, aber mit dem Ergebnis läßt sich die Mehrdeutigkeit der Phase aufheben und wir erhalten eine Phasenschätzung und einen bezüglich dieser Amplituden- und Phasenschätzung zu unserem (leicht geglätteten) Ausgangssignal ergänzten Imaginärteil.



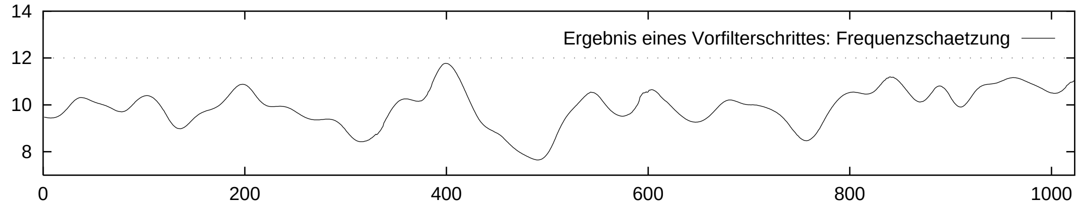

Die Phasenschätzung weicht bedingt durch das Rauschen und der von der Amplitude des unverrauschten Signals abweichenden Amplitudenschätzung vom Phasenverlauf im unverrauschten komplexen Signals ab. Der Realteil des auf diese Weise konstruierten komplexen Signals ist gerade das leicht geglättete Eingangssignal.



Um das Signal mit einer Gaborfilterkette zu glätten, muß noch die Filterfrequenz bestimmt werden. Bei komplexen harmonischen Schwingungen haben wir eine zufriedenstellende Schätzung für die Filterfrequenz durch einen Vorfilterschritt aus dem Differenzenquotienten der Phase durch eine Median-Operation mit anschließender Glättung gewonnen.



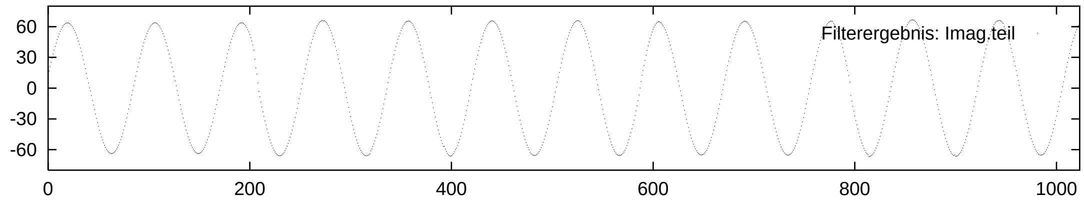

Der Differenzenquotient der geschätzten Phase unseres Beispiels ist stark verrauscht und weist zahlreiche Ausreißer auf. Eine Median-Operation, angewendet auf die Phase, mit einer anschließender Glättung, die bei verrauschten komplexen harmonischen Schwingungen eine brauchbare Frequenzschätzung geliefert hat, ergibt hier aufgrund der starken Störungen in der Phase keine gute Filterfrequenz:

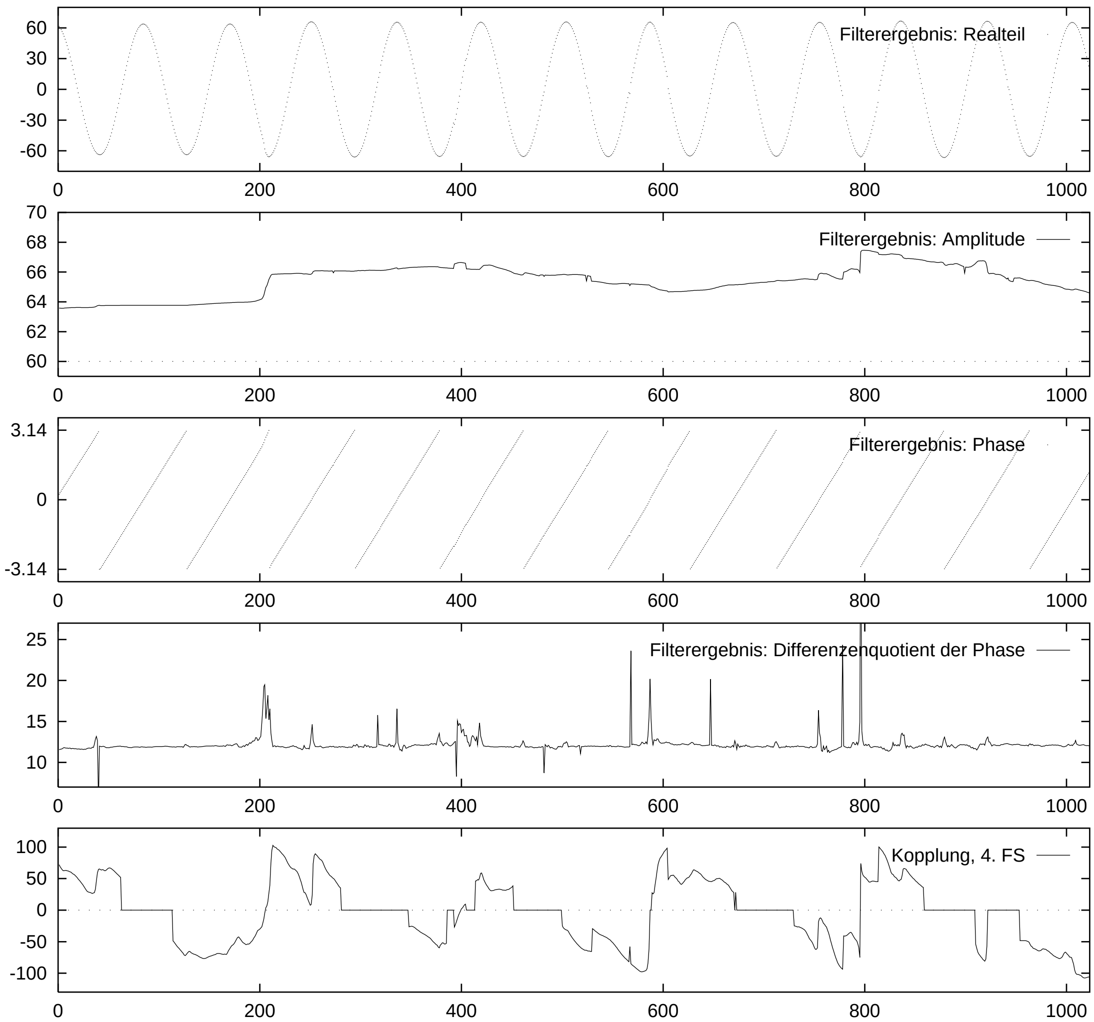



Die Frequenzschätzung aus den Nullstellen ist bei der sprungerhaltenden Glättung reeller komplexer Schwingungen, die zu komplexen Schwingungen ergänzt werden, vorzuziehen.
Wir filtern das auf diese Weise geschätzte komplexe Signal mit einer Filterkette der Länge 4 und Halbierungs-Vervierfachungsstrategie mit den Parametern

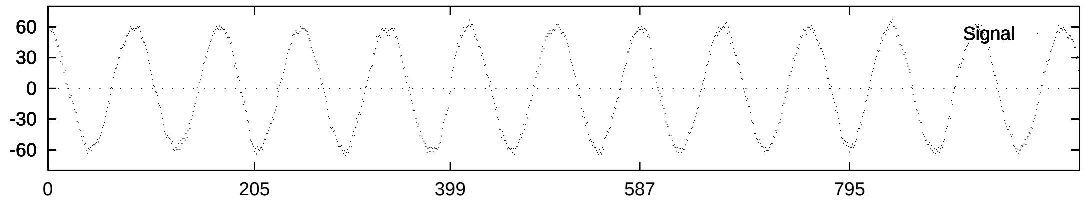
| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS |
|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 30 | 15 | 7.5 | 3.75 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.2\pi$ | $0.1\pi$ | $0.05\pi$ | $0.025\pi$ |
| $\eta$ | 1 | 4 | 16 | 64 |

Wir wählen die Varianz, die die Amplitudenabweichung gewichtet, größer als 0, um ein geringes Verschmieren der Amplitudensprünge zuzulassen. Dabei nehmen wir aus den oben aufgeführten Gründen als Filterfrequenz bei jedem Schritt die Frequenzschätzung, die wir benutzt haben, um den Imaginärteil zu ergänzen.

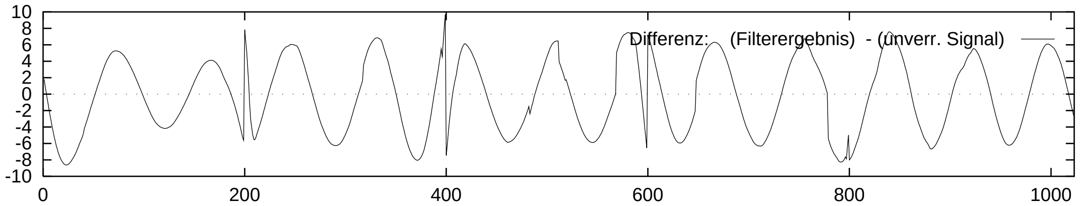





Die steilen Übergänge von - nach + in der oben abgebildeten Kopplungsdifferenz beim letzten Filterschritt markieren an den Stellen 205, 399, 587 und 795 Signalsprünge.




Die Amplitudenschätzung weicht von der Originalamplitude nach oben ab. Daraus resultiert ein Filterergebnis, dessen Amplitude größer als die des unverrauschten Originalsignal ist. Bei der Differenz von Realteil des Filterergebnisses und dem unverrauschten Originalsignal ist das deutlich zu sehen.




Wir fassen die Vorgehensweise bei der Ergänzung eines Imaginärteils unter den oben getroffenen Voraussetzungen zusammen:

**Ergänzung eines Imaginärteils 5.1** *Das Signal $f$ wird geglättet, indem $f(t)$ durch $(f(t-1)+f(t)+f(t+1))/3$ ersetzt wird. Die anschließende Ergänzung eines Imaginärteiles gliedert sich in die folgenden drei Schritte:*

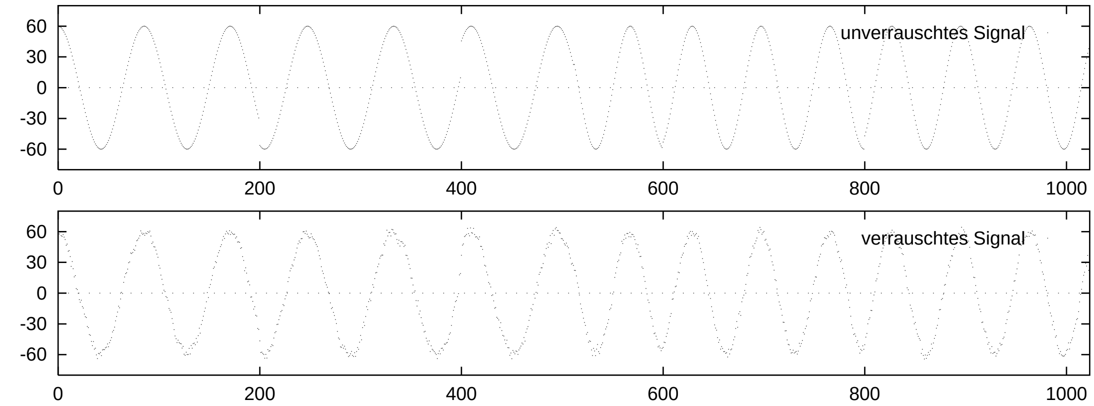
1. **Frequenzschätzung** *Aus den Nullstellen des geglätteten Signals wird nach 5.3 die Periodenlänge und somit die Frequenz geschätzt.*
   *Diese grobe Schätzung wird durch eine Median-Operation mit der Umgebungsgröße $n = \max\{50, 2 \cdot \mathbf{period}_f(t)\}$ verbessert.*

2. **Amplitudenschätzung** *Aus dem geglätteten Signal wird mit der gewonnenen Schätzung der Periodenlänge die Amplitude nach 5.5 geschätzt.*
   *Parallel dazu wird der Gaborfilteroutput des Signals berechnet, wobei als Filterfrequenz die geschätze Frequenz genommen wird.*

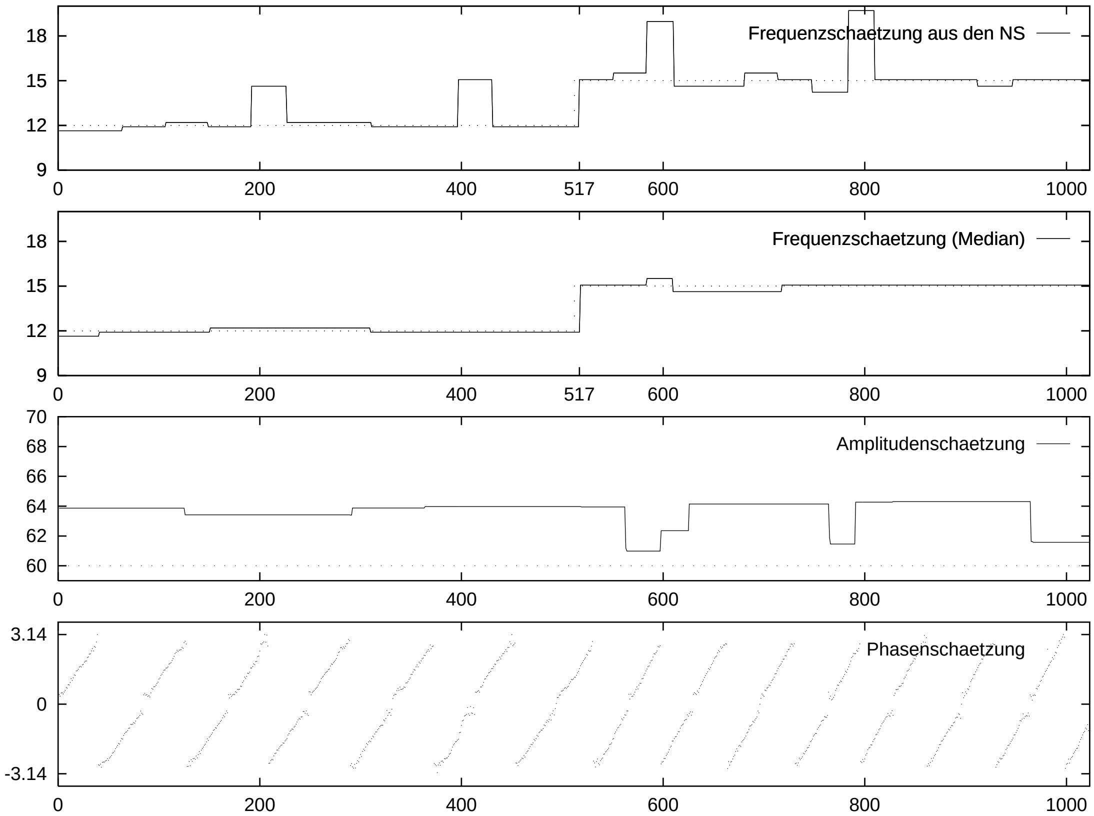
3. **Phasenschätzung** *Aus der Amplitudenschätzung und dem Signal wird die Phase bis auf Mehrdeutigkeit berechnet. Nach 5.6 wird mit dem linearen Gaborfilteroutput mit der geschätzten Frequenz die Mehrdeutigkeit der Phase aufgehoben.*

### 5.2.2 Beispiel: Frequenzsprünge

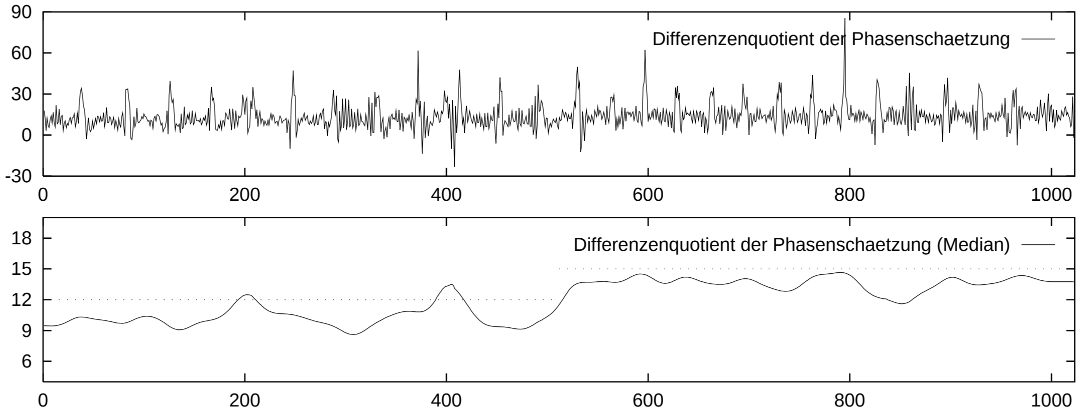
Dieses Signal ist analog zum letzten Beispiel entstanden, jedoch mit Phasensprüngen um $0.2\pi$ an den Stellen 200, 400, 600 und 800 und abweichender Frequenz: Die Signalfrequenz ist auf $[\![1, 512]\!]$ gleich 12 und auf $[\![513, 1024]\!]$ gleich 15.



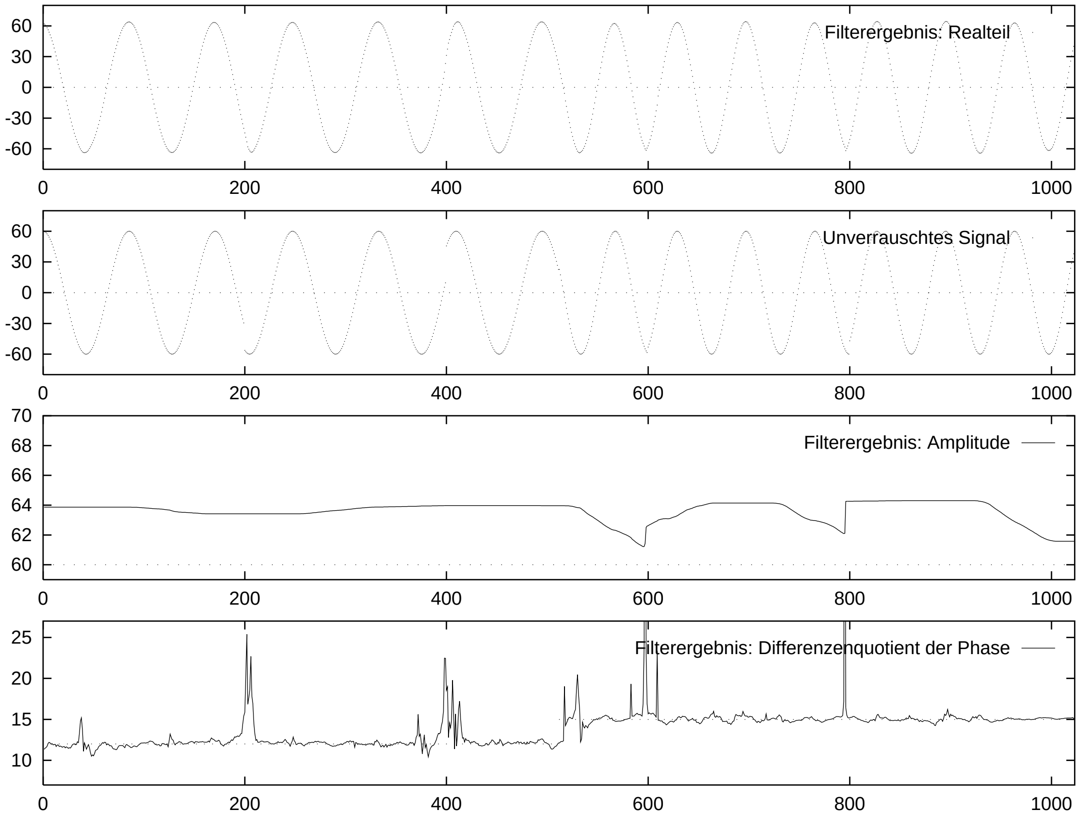

Der tatsächliche Frequenzverlauf im Signal ist bei den folgenden Schätzungen zum besseren Vergleich mit eingezeichnet. Er springt an der Stelle 512. Die Frequenzschätzung nach 5.3 hat jedoch an dieser Stelle keinen Sprung, da das Signal zwischen 517 und 518 einen Nulldurchgang hat.

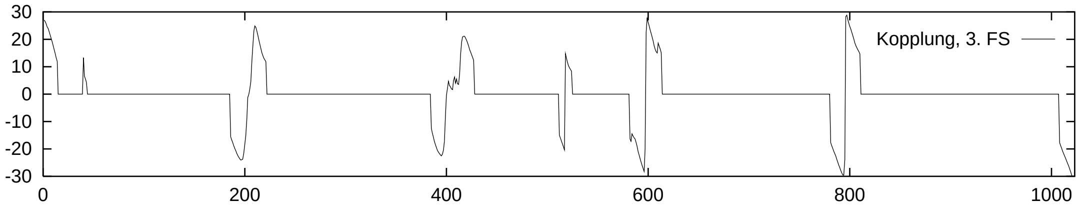


Das Signal wurde zu einer komplexen harmonischen Schwingung ergänzt mit einer stark verrauschten Phase, deren Differenzenquotient nicht für eine Frequenzschätzung geeignet ist. Glätten wir den Differenzenquotient der geschätzten Phase durch eine Median-Operation, ist das Ergebnis schlechter als die Frequenzschätzung $\mathbf{freq}_f$, die die Nullstelleninformation benutzt.

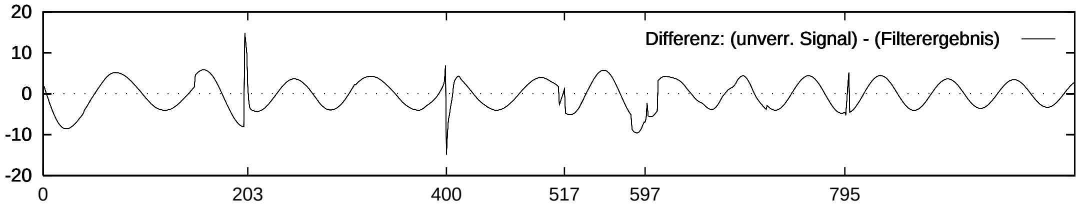


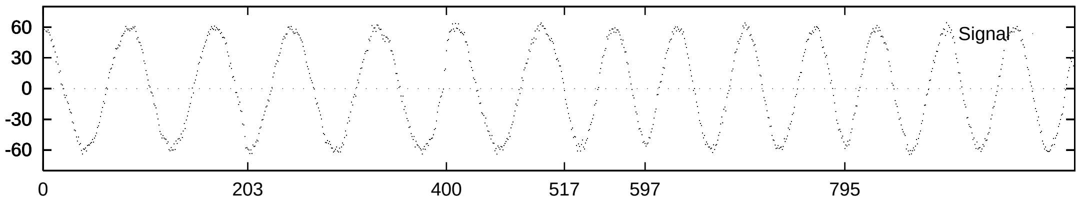

Aus diesem Grund filtern wir auch hier das Signal mit einer Filterkette mit der Filterfrequenz $\mathbf{freq}_f$. Wir wählen eine Filterkette der Länge 3 mit denselben Parametern wie beim letzten Beispiel.






An den Stellen 203, 400, 517, 597 und 795 markieren die steilen Übergänge von - nach + in der Kopplungsdifferenz beim letzten Filterschritt Signalsprünge. Beim unverrauschten Signal liegen die Sprünge an den Stellen 200, 400, 512, 600 und 800.



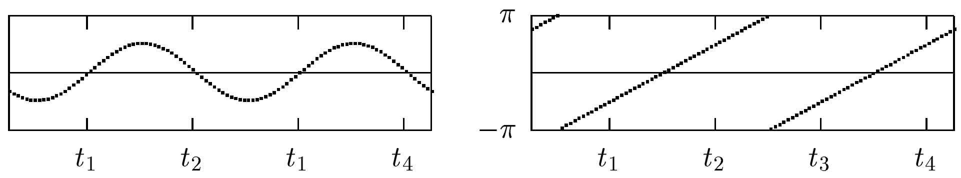
## 5.3 Die Ergänzung bei nahezu linearer Phase

Bei einer komplexen, unverrauschten, harmonischen Schwingung ohne Sprünge, deren Frequenz bekannt ist, erhält man aus dem Phasenwert $\varphi(t_0)$ an einer beliebigen Stelle $t_0$ den gesamten Phasenverlauf, indem man die Phase von der Stelle $t_0$ aus linear fortsetzt. Diese Idee übertragen wir auf verrauschte, reelle, harmonische Schwingungen. Um den Fehler gering zu halten, orientieren wir uns an den Nulldurchgängen und setzen die Phase $\varphi$ zwischen ihnen linear fort. Anschließend berechnen wir die Amplitude $r$, falls der Nenner von Null verschieden ist, nach der Formel

$$r(t) \quad := \quad \frac{f(t)}{\cos\varphi(t)}$$

Bei einem Realteil einer unverrauschten, harmonischen Schwingung erhält man auf diese Weise die Amplitude und die Phase der Schwingung. Bei einer verrauschten, reellen, harmonischen Schwingung $f$ erhalten wir ein komplexes Signal mit stückweise linearer Phase und einer Amplitude, die um so verrauschter ist, je stärker $f$ verrauscht ist.

**Beispiel 5.7** *Die unverrauschte harmonische Schwingung $f$ hat Nulldurchgänge an den Stellen $t_1, \dots, t_4$. Ist $f$ zwischen zwei Nulldurchgängen auf einem Intervall $]\!]t_j, t_{j+1}[\![$ positiv, so lassen wir die Phase $\varphi$ auf dem Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{\pi}{2}$ laufen, ansonsten von $\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{3}{2}\pi$ modulo $2\pi$ . Am Rand führen wir die Phase so fort, als ob vor der Stelle $t_1$ und nach der Stelle $t_4$ kein Phasensprung auftritt:*




Bei einem verrauschten Signal ist es wie in letzten Abschnitt auch hier sinnvoll, das Signal zuvor durch eine lokale lineare Mittelung zu glätten, um eng benachbarte Nulldurchgänge zu eliminieren.

**Phasenschätzung 5.8** *Sei $f\colon [\![1, l]\!] \to \mathbb{R}$. Seien $t_1, \dots, t_n$ die Nulldurchgänge von $f$ mit $t_0 := 1 < t_1 < \dots < t_{n+1} =: l$. Wir setzen für $t \in [\![1, l]\!] \to \mathbb{R}$ und $j = 1, \dots, n$*

$$\begin{aligned}
\mathbf{phase}_f|_{[\![t_j, t_{j+1}[\![}(t) \quad &:= \quad (t - t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j) \cdot \pi \;+\; \Delta_j(t) \\
\Delta_j(t) \quad &:= \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \textit{falls} \quad f(t) > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \textit{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

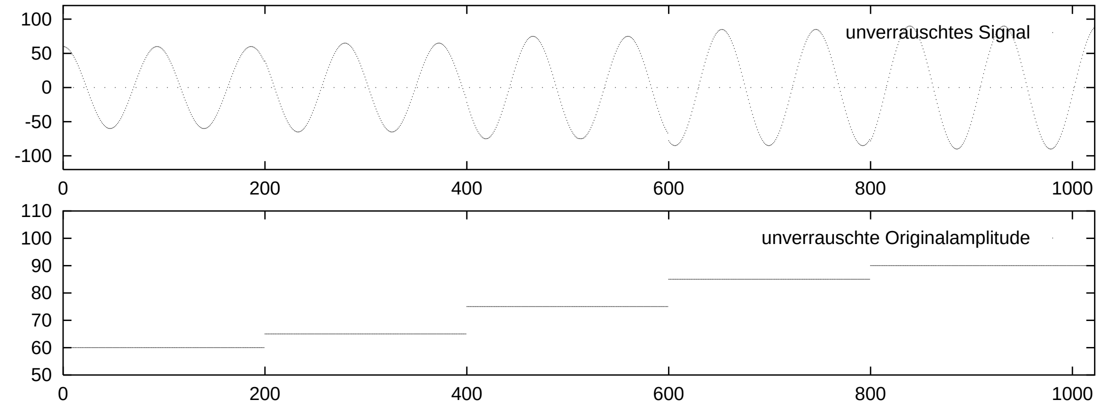
*und setzen* $\mathbf{phase}_f$ *auf* $\llbracket 1, t_1 \llbracket$ *und* $\llbracket t_n, l \rrbracket$ *fort:*

$$\begin{aligned} \mathbf{phase}_f|_{\llbracket 1,t_1 \llbracket}(t) &:= (t - t_1) \cdot (t_2 - t_1) \cdot \pi + \Delta_1(t) \\ \mathbf{phase}_f|_{\llbracket t_n,l \rrbracket}(t) &:= (t - t_n) \cdot (t_{n-2} - t_{n-1}) \cdot \pi + \Delta_{n-2}(t) \end{aligned}$$

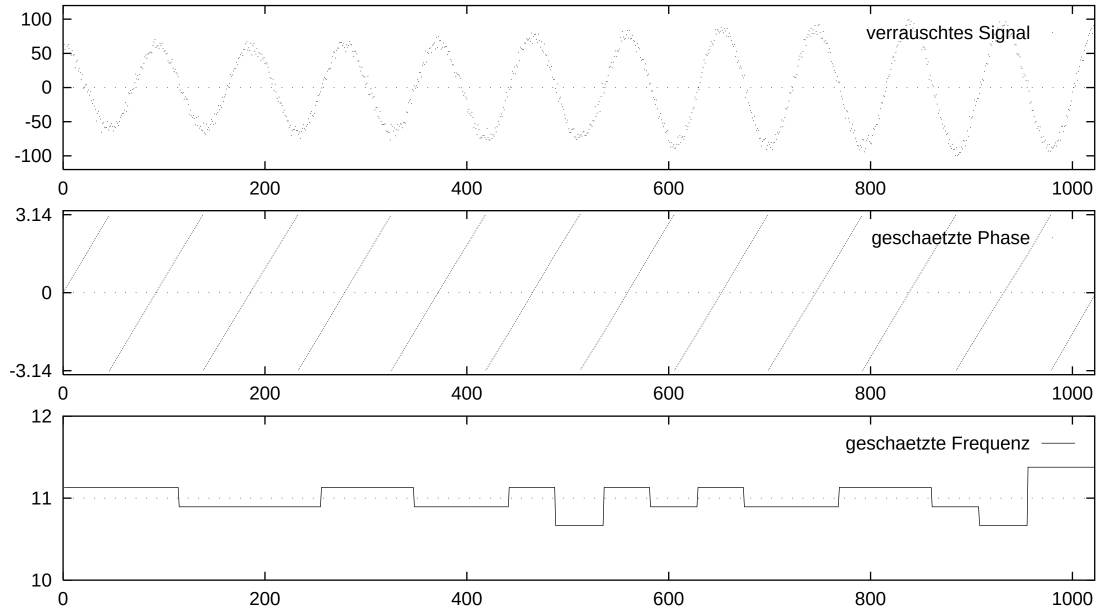
*Wir bezeichnen* $\mathbf{phase}_f$ *als Phasenschätzung aus* $f$*.*

### 5.3.1 Beispiel: Signalsprünge

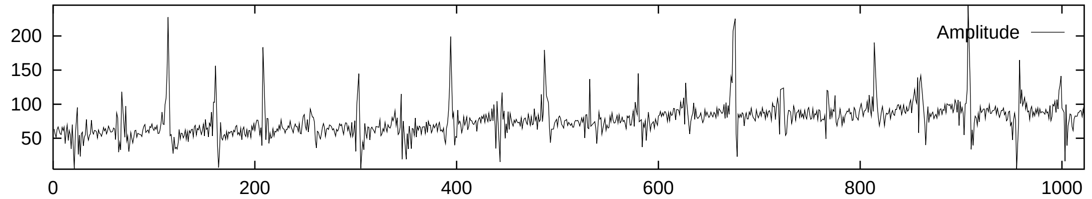
Das folgende Signal ist der Realteil einer komplexen harmonischen Schwingung der Frequenz 11. Die Amplitude springt an den Stellen 200, 400, 600 und 800 von 60 um +5, +10, +10, +5 auf 90.



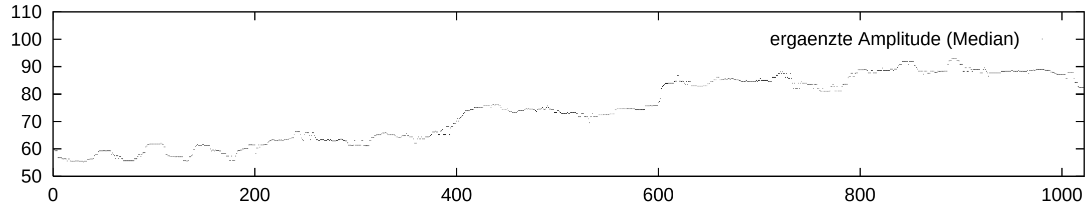

Der Realteil wurde verrauscht mit Gaußrauschen der Streuung $\sigma_{\text{RAUSCH}} = 5$. Wir schätzen die Phase nach 5.8, indem wir den Verlauf zwischen den Nulldurchgängen linear interpolieren.

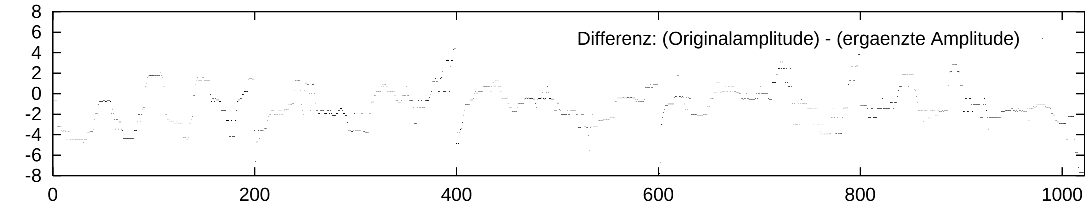


Wir berechnen die Amplitude $r$ aus dem Signal $f$ und der geschätzten Phase $\mathbf{phase}_f$ gemäß $r(t) := f(t)/\cos(\mathbf{phase}_f(t))$, falls der Nenner von 0 verschieden ist, ansonsten setzen wir die Amplitude durch einen Nachbarwert geeignet fort.

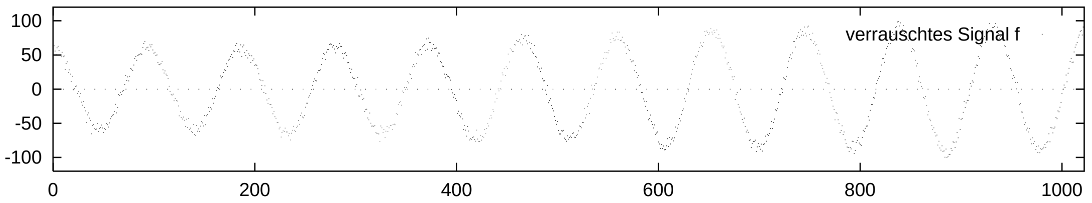


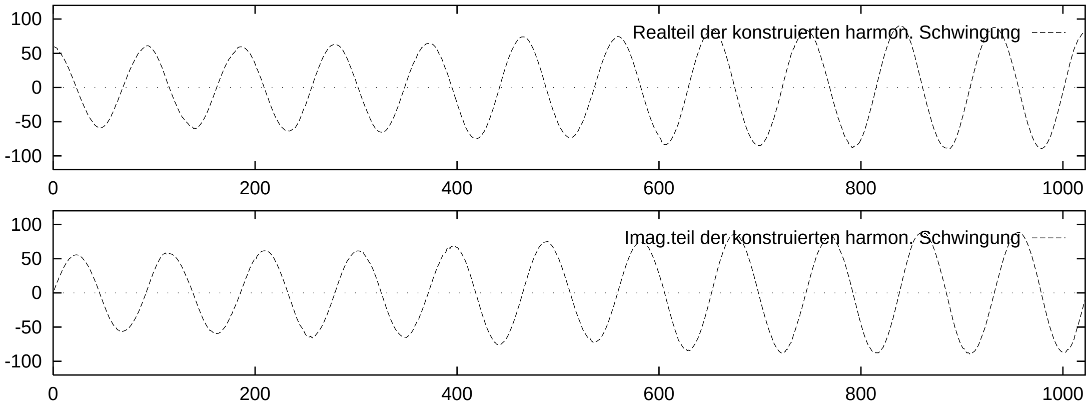

In der Nähe der Nulldurchgänge des Signals wird der Nenner sehr klein und ruft Ausreißer bei der Amplitudenschätzung hervor. Je verrauschter das Signal $f$ ist, um so verrauschter wird das Ergebnis der auf diese Weise geschätzten Amplitude. Diese Ausreißer werden durch eine Median-Operation geglättet. Für die Umgebungsgröße wählen wir dabei die Hälfte der Periodenlänge, wenn die Periodenlänge nicht zu klein ist, und 50 sonst. Dadurch stellen wir sicher, daß genügend Werte eingehen und die Spitzen der Amplitude eliminiert werden. Wir haben somit eine Amplitude zum geschätzten Phasenverlauf $\mathbf{phase}_f$ ergänzt. Bei unserem Beispiel erhalten wir:



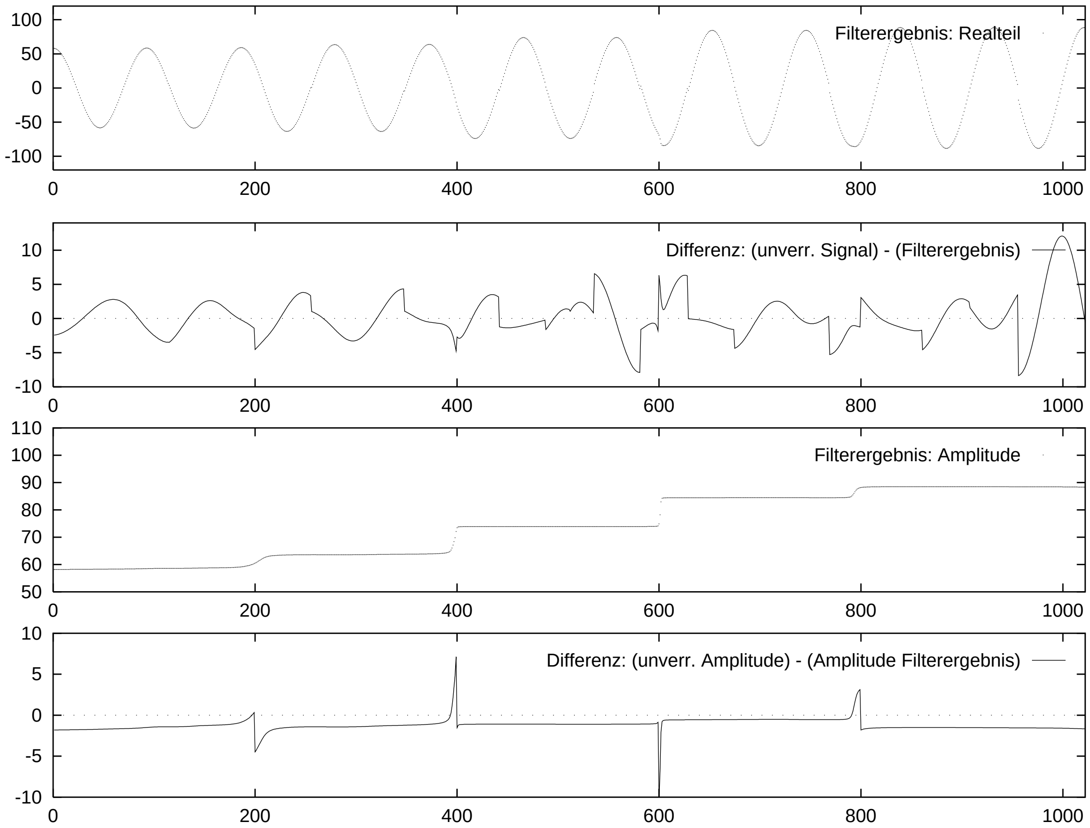

Der Realteil der auf diese Weise konstruierten harmonischen Schwingung ist nicht das verrauschte Eingangssignal $f$, da die Amplitude anschliessend durch eine Median-Operation geglättet wurde. Der Unterschied ist bei unseren Beispiel deutlich zu sehen:

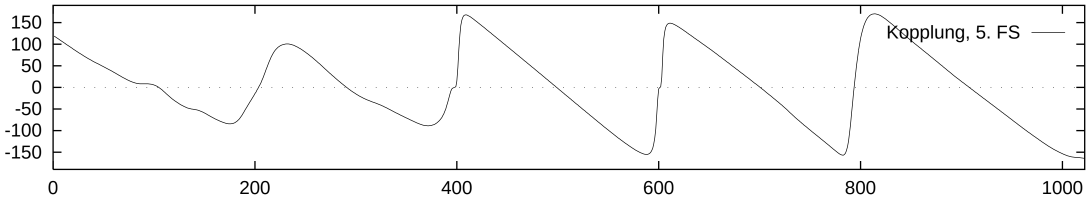





Wir filtern das auf diese Weise gewonnene komplexe Signal mit einer nichtlinearen Gaborfilterkette der Länge 5. Als Filterfrequenz nehmen wir in jedem Filterschritt stets die oben geschätzte Frequenz.

| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 17 | 8.5 | 4.25 | 2.13 | 1.06 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $0.2\pi$ | $0.1\pi$ | $0.05\pi$ | $0.025\pi$ | $0.013\pi$ |
| $\eta$ | 1.5 | 6 | 24 | 96 | 384 |






Die steilen Nulldurchgänge von - nach + der Kopplungsdifferenz markieren Amplitudensprünge an den Stellen 203, 398, 601 und 793.

Wir halten das Vorgehen, aus einer reellen, harmonischen Schwingung eine komplexe, harmonische Schwingung mit stückweise linearer Phase zu konstruieren, fest:

**Ergänzung eines Imaginärteils 5.2** *Das Signal $f$ wird geglättet, indem $f(t)$ durch $(f(t-1)+f(t)+f(t+1))/3$ ersetzt wird. Die anschließende Konstruktion eines komplexen Signals geschieht in zwei Schritten:*

1. **Phasenschätzung** *Die Nulldurchgänge des geglätteten Signals werden markiert. Aus den Nulldurchgängen gewinnen wir nach 5.8 die Phase.*

2. **Amplitudenschätzung** *Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\epsilon \ll 1$. Die Amplitude $r(t)$ an einer Stelle $t$ erhalten wir aus dem Signalwert $f(t)$ und der Phasenschätzung $\mathbf{phase}_f(t)$*

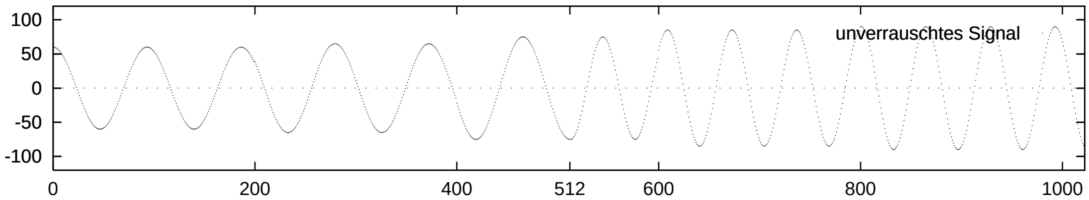
$$r(t) \quad := \quad \frac{f(t)}{\max\{\cos \mathbf{phase}_f(t), \epsilon\}}$$

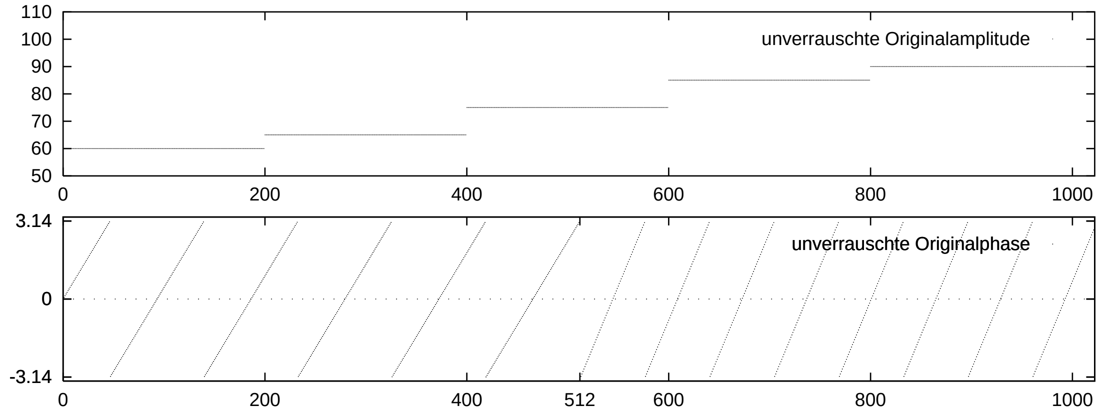
   *In der Praxis hat sich $\epsilon := 0.05$ bewährt. Die Amplitudenschätzung wird durch eine Median-Operation mit der Umgebungsgröße $n = \max\{50, \mathbf{period}_f(t)/2\}$ geglättet.*

**Bemerkung 5.9** *Wie wir oben bereits an einem Beispiel gesehen haben, erhalten wir auf diese Weise ein komplexes Signal, dessen Realteil von $f$ abweichen kann. Wir haben somit nicht nur einen Imaginärteil zu $f$ ergänzt, sondern bereits einen Vorverarbeitungsschritt gemacht, in dem wir die Amplitude und somit auch $f$ geglättet haben. Zu diesem Resultat haben wir dann einen Imaginärteil ergänzt.*

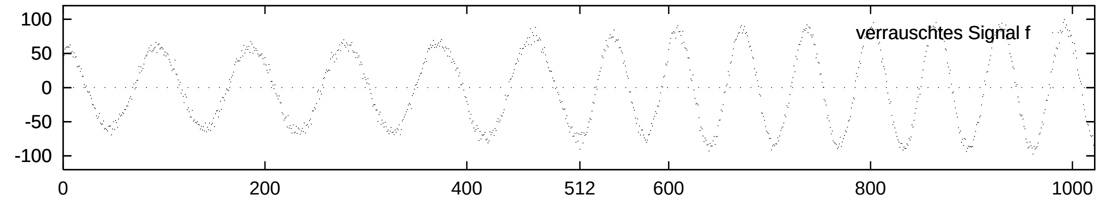
### 5.3.2 Beispiel: Frequenzsprünge

Das folgende Signal wurde analog zum letzten Beispiel erzeugt. Es ist der Realteil einer komplexen harmonischen Schwingung, deren Amplitude an den Stellen 200, 400, 600 und 800 von 60 um +5, +10, +10, +5 springt und deren Frequenz auf $[\![1, 512]\!]$ den Wert 11 und auf $[\![513, 1024]\!]$ den Wert 12 hat.

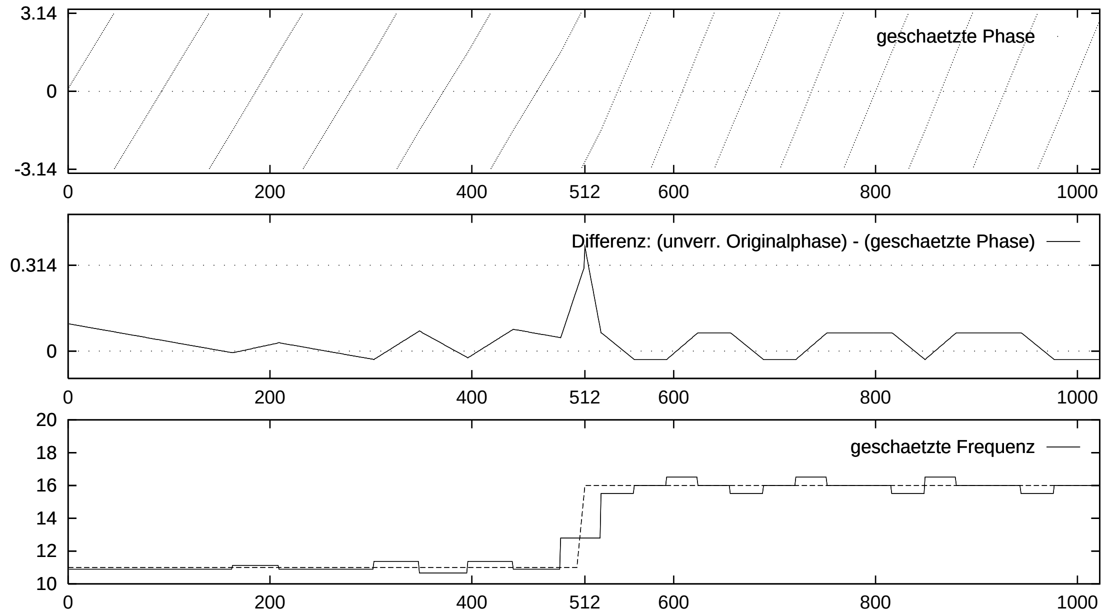




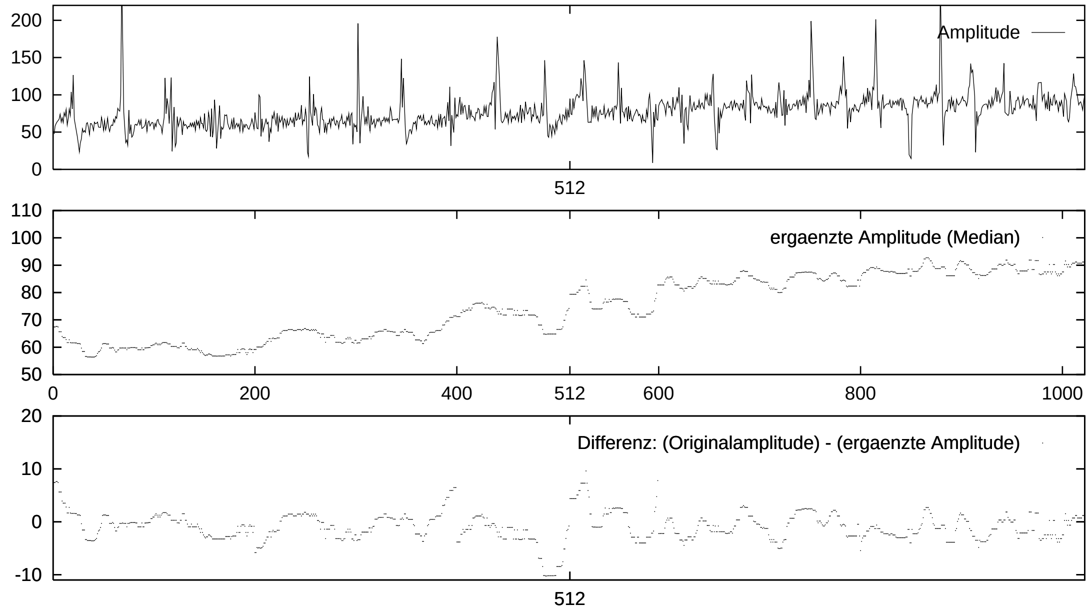

Das Signal wurde wie das letzte Beispiel mit Gaußrauschen der Varianz $\sigma_{\text{RAUSCH}} = 5$ verrauscht.




Nach 5.8 interpolieren wir die Phase linear zwischen den Nulldurchgängen. Im Bereich um den Frequenzsprung an der Stelle 512 weicht die auf diese Weise konstruierte Phase deutlich von der Phase des unverrauschten Originalsignals ab, da die Stelle, an der die Frequenz springt, ungefähr in der Mitte der benachbarten Nulldurchgänge liegt.

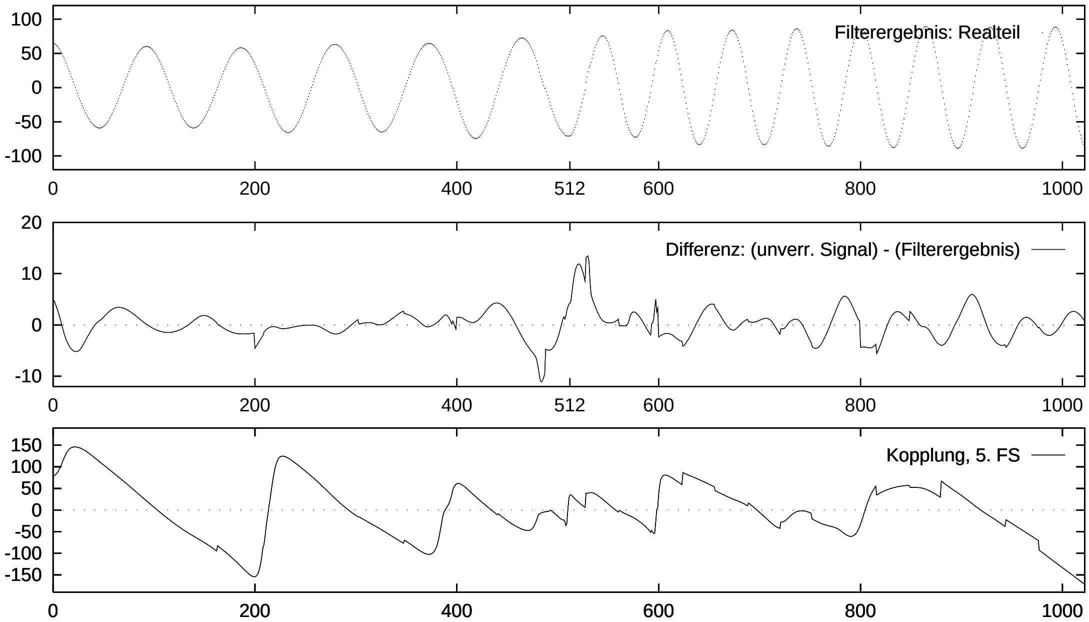



Der Frequenzverlauf im unverrauschten komplexen Originalsignal ist bei der geschätzten Frequenz mit eingezeichnet. Wir berechnen und glätten die Amplitude.




Wir starten eine nichtlineare Gaborfilterkette der Länge 5. Als Filterfrequenz nehmen wir stets die oben geschätzte Frequenz. Die steilen Übergänge von - nach + der Kopplungsdifferenz beim letzten Filterschritt liefert Sprünge an den Stellen 213, 388, 509, 598 und 804.

| | 1.FS | 2.FS | 3.FS | 4.FS | 5.FS |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_{\text{AMP}}$ | 17 | 8.5 | 4.25 | 2.13 | 1.06 |
| $\zeta_{\text{PHAS}}$ | $1\pi$ | $0.5\pi$ | $0.25\pi$ | $0.125\pi$ | $0.062\pi$ |
| $\eta$ | 1.5 | 6 | 24 | 96 | 384 |



# Literaturverzeichnis


[AuWeu96] V. Aurich, J. Weule: *Non-Linear Gaussian Filters Performing Edge Preserving Diffusion*, Proceed. 17.DAGM Symposium über Mustererkennung, Springer (1995), S. 538-545

[BBNS87] H. Baborsky, T. Beth, H. Neunzert, M. Schulz-Reese: *Mathematische Methoden in der Systemtheorie: Fourieranalysis*, Teubner (1987)

[BZ87] A. Blake, A. Zisserman *Visual Reconstruction*, MIT Press, Cambridge (Massachusette), London (England) (1987)

[Dau95] U. Daub: *Wieviel Informationen enthalten Helligkeitskanten?*, Inaugural-Dissertation, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf (1995)

[GG] S. Geman, D. Geman: *Stochastische Relaxation, Gibbs Distribution, and Bayesian Restoration of Images*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (1984), (6): S. 721-741

[LS75] ed. J.C. Dainty: *Laser Speckle*, Springer (1975)

[NR92] W.H. Press e.a.: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1992)

[Pap85] A. Papoulis: *Signal Analysis*, McGraw-Hill (1985)

[PM90] P. Perona, J. Malik *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (1990), 12(7): S. 629-639

[Rich66] H. Richter: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer (1966)

[Rud73] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1973)

[Sch66] L. Schwartz *Théorie des distributions*, Hermann (1966)

[SMCM91] P. Saint-Marc, J. Chen, G. Medioni *Adaptive smoothing: A general tool for early vision*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (1991), 13(6): S. 514-529

[Weu94] J. Weule: *Iteration nichtlinearer Gauß-Filter in der Bildverarbeitung*, Inaugural-Dissertation, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf (1994)

[Zem87] A.H. Zemanian: *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill (1965), Reprint Dover (1987)

# Index