

# Signalverarbeitung

Eine Einführung

Volker Aurich

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Überblick</b>	<b>7</b>
1.1	Signale . . . . .	7
1.2	Beispiele . . . . .	7
1.3	Abtastung kontinuierlicher Signale . . . . .	7
1.4	Quantisierung . . . . .	8
1.5	Der Übergang von analogen zu digitalen Signalen und zurück . . . . .	8
1.6	Signalverarbeitungssysteme . . . . .	9
1.7	Die Beschreibung kontinuierlicher Signale und Systeme im Frequenzbereich . . . . .	13
1.8	Die Beschreibung diskreter Signale und Systeme im Frequenzbereich . . . . .	15
1.9	Simulation kontinuierlicher Systeme durch diskrete . . . . .	16
1.10	Die zeitliche Begrenzung von Signalen . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Diskrete Signale und Systeme</b>	<b>19</b>
2.1	Signale . . . . .	19
2.2	Systeme . . . . .	20
2.3	Die Faltung . . . . .	20
2.4	Diskrete LTI-Systeme . . . . .	22
2.5	Einseitige Zeitbeschränkung . . . . .	23
<b>3</b>	<b>LTI-Systeme im Frequenzbereich</b>	<b>25</b>
3.1	Die Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{Z})$ . . . . .	25
3.2	Stabile LTI-Systeme . . . . .	26
3.3	Ideale Bandfiltercharakteristiken . . . . .	28
3.4	Spezifikation realer Bandfilter . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Die diskrete Fouriertransformation</b>	<b>33</b>
4.1	Die Fouriertransformation diskreter periodischer Funktionen . . . . .	33
4.2	Die Diskrete Fouriertransformation (DFT) . . . . .	34
4.3	Die zyklische Faltung . . . . .	34
4.4	Vergleich der FT auf $L_1(\mathbb{Z})$ mit der DFT . . . . .	35

4.5	Die schnelle Fouriertransformation (FFT) . . . . .	36
4.6	Berechnung der Faltung mit Hilfe der DFT . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Der Entwurf von digitalen Filtern</b>	<b>41</b>
5.1	Die Fenstermethode . . . . .	41
5.2	Frequenzabtastung . . . . .	42
5.3	Linearer Phasengang . . . . .	42
5.4	Einfache experimentelle Beispiele . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Korrelationstechniken</b>	<b>47</b>
6.1	Die Kreuzkorrelation . . . . .	47
6.2	Die zyklische Kreuzkorrelation . . . . .	48
6.3	Korrelationsfilter, Matched Filter . . . . .	48
6.4	Laufzeitbestimmung und Anwendungen . . . . .	50
6.5	Die Korrelation periodischer Signale . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Die Systemfunktion von LTI-Systemen</b>	<b>53</b>
7.1	Die z-Transformation diskreter Signale . . . . .	53
7.2	Signale mit rationaler z-Transformierter . . . . .	55
7.3	Die Systemfunktion diskreter LTI-Systeme . . . . .	57
7.4	Entwurf von Filtern durch Platzierung von Null- und Polstelle . . . . .	58
7.5	Zusammenschaltung von LTI-Systemen . . . . .	60
7.6	Regelungssysteme . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Rekursive Filter</b>	<b>65</b>
8.1	Rekursive Systeme . . . . .	65
8.2	Lineare rekursive Filter . . . . .	66
<b>9</b>	<b>Zeitliche Beschränkung</b>	<b>71</b>
9.1	Zeitliche Beschränkung von Signalen . . . . .	71
9.2	Die gleitende DFT . . . . .	73
9.3	Beschreibung von Filtern mit der gleitenden DFT . . . . .	75
9.4	Blockweise gleitende DFT . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Kontinuierliche Signale und Systeme</b>	<b>77</b>
10.1	Funktionen als Signale . . . . .	77
10.2	Die Faltung . . . . .	78
10.3	Dirac-Impulse . . . . .	79
10.4	Impulsfolgen und diskrete Signale . . . . .	80
10.5	Temperierte Funktionen . . . . .	81
10.6	Temperierte Distributionen . . . . .	82
10.7	Kontinuierliche Systeme . . . . .	85

<b>11 Die Fouriertransformation kontinuierlicher Signale</b>	<b>87</b>
11.1 Die Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{R})$ . . . . .	87
11.2 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ . . . . .	87
11.3 Die Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R})$ . . . . .	88
11.4 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$ . . . . .	88
11.5 Beschreibung kontinuierlicher Systeme im Frequenzbereich . . . . .	91
<b>12 Abtasten und Interpolieren</b>	<b>93</b>
12.1 Shannons Abtasttheorem . . . . .	93
12.2 Unterabtastung . . . . .	94
12.3 Rekonstruktion aus den Abtastwerten . . . . .	94
12.4 Emulation kontinuierlicher LTI-Systeme durch diskrete . . . . .	95
<b>13 Skizzenhafte Grundlagen der Informationsübertragung</b>	<b>97</b>
13.1 Modulation . . . . .	97
13.2 Sender- und Empfänger-Konzepte . . . . .	105
13.3 Binäre Datenübertragung . . . . .	108
13.4 Mehrwertige Datenübertragung . . . . .	111
13.5 Breitbandige Datenübertragung mit orthogonalen Signalen . . . . .	112
13.6 Spreizspektrum-Techniken . . . . .	113



# Kapitel 1

## Einleitung und Überblick

### 1.1 Signale

Ein Signal ist eine Größe, die sich in Abhängigkeit von einigen Parametern ändert. Es wird modelliert als eine Funktion von einer oder mehreren Variablen. Man spricht von einem *kontinuierlichen Signal*, wenn die Variablen in einer offenen Teilmenge  $\Omega$  eines  $\mathbb{R}^n$  (oder in einer Untermannigfaltigkeit mit Dimension  $n \geq 1$ ) variieren.

*diskreten Signal*, wenn die Variablen in einem abzählbaren diskreten Raum variieren.

Wir werden im Folgenden vor allem *eindimensionale* (oder *univariate*) Signale betrachten; das sind Signale, die im kontinuierlichen Fall auf einem Intervall in  $\mathbb{R}$  oder einer Kreislinie definiert sind und im diskreten Fall auf einem Intervall in  $\mathbb{Z}$  oder einer endlichen Gruppe  $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  mit  $N \in \mathbb{N}$ . Beachte, daß man  $\mathbb{Z}_N$  vermöge der Abbildung

$$\mathbb{Z}_N \rightarrow S^1, t \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N}t}$$

in die Einheitskreislinie  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  einbetten kann und daß diese Einbettung ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei man auf  $S^1$  die von  $\mathbb{C}$  induzierte Multiplikation nimmt. Diese Gruppenstruktur auf dem Definitionsbereich ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Signalanalyse.

### 1.2 Beispiele

#### 1.2.1 Kontinuierliche Signale

Die Ausgangsspannung eines Sensors in Abhängigkeit von der Zeit.

Sensor:	Mikrofon	Kamera	Antenne	Elektroden	Thermometer
Signal:	Tonsignal	Bildsignal	Hochfrequenzsignal	EKG	Temperatur

#### 1.2.2 Diskrete Signal

Zeitreihen d.h. Folgen von Zahlen, z.B. der Verlauf des DAX oder Folgen von Abtastwerten eines kontinuierlichen Signals.

### 1.3 Abtastung kontinuierlicher Signale

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein kontinuierliches Signal, und sei  $(t_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann nennt man das diskrete Signal  $f_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, j \mapsto f(t_j)$  durch Abtastung aus  $f$  entstanden. In der Praxis wählt man meist äquidistante Abtastung d.h. man wählt eine Schrittweite  $T > 0$  und setzt  $t_j = j \cdot T$  (oder  $t_j = j \cdot T + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ).

Beachte: Digitalrechner können nur diskrete Signale verarbeiten. Aus kontinuierlichen Signalen muß man erst durch Abtastung diskrete Signale machen.

## 1.4 Quantisierung

Ein Digitalrechner kann nicht mit beliebigen reellen Zahlen rechnen, sondern nur mit einer endlichen Teilmenge (der rationalen Zahlen). Daher muß man die Werte eines diskreten Signals durch im Rechner darstellbare Zahlen approximieren. Dafür benutzt man sogenannte *Analog-Digital-Umsetzer* (*ADU*, *ADC*). Das sind elektronische Schaltungen mit einem analogen Eingang und  $n$  digitalen Ausgängen. An den Eingang darf eine beliebige Spannung  $U_{\text{in}}$  aus einem (vom ADU abhängigen) Intervall  $[U_{\text{min}}, U_{\text{max}}[$  gelegt werden. Die Spannungswerte der Ausgänge  $a_0, \dots, a_{n-1}$  stellen die Bits der Dualdarstellung einer ganzen Zahl  $\sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j = \varphi(U_{\text{in}})$  dar. Meist ist  $U_{\text{min}} = 0$ , und die Funktion  $\varphi$  ist eine Treppenfunktion mit gleichartigen Stufen.

$$\varphi(U_{\text{in}}) = \left\lfloor 2^n \frac{U_{\text{in}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}} \right\rfloor$$

Man spricht dann von einem  $n$ -Bit-ADU. Manchmal gilt auch  $U_{\text{min}} = -U_{\text{max}}$ , dann wird der Ausgangswert in Zweierkomplementdarstellung ausgegeben.

Um umgekehrt aus einer  $n$ -Bit-Zahl  $x$  wieder eine entsprechende Spannung  $U$  zu erzeugen, benutzt man *Digital-Analog-Umsetzer* (*DAU*, *DAC*). Das sind elektronische Schaltungen, die bei Eingabe von  $x$  idealerweise die Spannung  $U = x \cdot \Delta U$  an ihrem Ausgang erzeugen.  $\Delta U > 0$  ist die minimal mögliche Spannungsänderung.

Kontinuierliche Signal mit kontinuierlichem Wertebereich werden auch *analoge Signale* genannt; diskrete, quantisierte Signale werden auch *digitale Signale* genannt.

## 1.5 Der Übergang von analogen zu digitalen Signalen und zurück

### 1.5.1 Quantisierungseffekte

Bei der Quantisierung geht Information verloren, weil sie nicht injektiv ist. Betrachtet man aber nur Signale, deren Werte im Intervall  $[U_{\text{min}}, U_{\text{max}}[$  liegen, so kann man den Fehler durch Erhöhen der Bit-Zahl des ADU prinzipiell beliebig klein machen.

**Bemerkung:** Wir werden deshalb die Quantisierungseffekte i.a. vernachlässigen und Signal mit Werten in  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{R}^n$ ) betrachten. Nur in einigen speziellen Situationen (rekursive Filter) werden wir die Quantisierungseffekte untersuchen.

**1.5.2 Abtasteffekte, Aliaseffekte** Auch bei der Abtastung geht i.a. Information verloren, weil sie nicht injektiv ist.

**Beispiel:**  $f_1 = 0$ ,  $f_2(t) = \sin 2\pi t$ , Abtastzeitpunkte  $t_j = j$ .  
Dann gilt  $f(t_j) = 0 = f_2(t_j)$  für alle  $j$ .

Es gibt jedoch das berühmte *Abtasttheorem von Shannon (1949)*. Es besagt, daß bei geeigneter Einschränkung der betrachteten Signale und bei geeigneter Wahl der Abtastzeitpunkte  $(t_j)_j$  (der sogenannten *Nyquistbedingung*) ein kontinuierliches Signal  $f$  durch die Folge  $(f(t_j))_j$  der Abtastwerte eindeutig bestimmt ist. (Präzise Formulierung später.)

Hält man die Voraussetzungen des Abtasttheorems nicht ein, so passiert es leicht, daß man aufgrund der Abtastwerte völlig falsche Vermutungen über das abgetastete Signal hat; so wird man in obigem Beispiel eher das Nullsignal für plausibel halten. Man spricht von sogenannten *Aliaseffekten*, die einem ein falsches Signal suggerieren. Am bekanntesten ist wohl der Effekt, daß sich schnell rollende Speichenräder in Kinofilmen manchmal langsam rückwärts zu bewegen scheinen.

### 1.5.3 Rekonstruktion kontinuierlicher Signale aus diskreten

**1.5.3.1 Problem:** Wie kann man aus einem diskreten Signal  $f_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  auf vernünftige Weise ein kontinuierliches Signal konstruieren (das man z.B. als Tonsignal auf Lautsprechern ausgeben kann)?

**1.5.3.2 Problem:** Kann man aus den Abtastwerten  $(f(t_j))_{j \in \mathbb{Z}}$  eines kontinuierlichen Signals  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Signal  $f$  rekonstruieren? (Beispiel: CD-Spieler)

**1.5.3.3 Lösungsansätze:****1.5.3.3.1 Treppenfunktion**

Setze

$$g(t) = f(t_j) \text{ für } t \in [t_j, t_{j+1}[$$

Diese Treppenfunktion  $g$  wird i.a. nur eine grobe Approximation an  $f$  sein.  $g$  ist unstetig.

**1.5.3.3.2 Lineare Interpolation**

Setze

$$g(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} f(t_{j+1}) + \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} f(t_j) \text{ für } t \in [t_j, t_{j+1}[$$

$g$  ist stetig. Wenn  $f$  stetig ist und zwischen zwei Abtastpunkten nicht allzu sehr variiert, kann  $g$  eine brauchbare Approximation an  $f$  sein.

**1.5.3.3.3 Shannons Interpolation**

Wenn die Voraussetzungen des Abtasttheorems (die Nyquistbedingung) erfüllt sind, erhält man im Falle äquidistanter Abtastpunkte das abgetastete Signal  $f$  aus den Abtastwerten exakt zurück vermöge *Shannons Interpolationsformel*

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t_j) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - t_j)}{\frac{\pi}{T}(t - t_j)}$$

wobei  $T > 0$  die Abtastschrittweite und  $t_j = j \cdot T$  die Abtastpunkte sind.

Welches Problem tritt bei der Anwendung dieser Formel in der Praxis auf?

## 1.6 Signalverarbeitungssysteme

Ein *Signalverarbeitungs-* oder *Übertragungssystem* oder *Filter* ist eine Vorrichtung, die jedem Eingangssignal ein Ausgangssignal zuordnet. Mathematisch modelliert man es als Abbildung, wobei allerdings der Definitionsbereich nicht immer von vornherein klar ist. Ähnlich wie bei holomorphen Funktionen oder linearen Operatoren in Hilberträumen variiert man den Definitionsbereich, um gewünschte Eigenschaften der Abbildung zu erreichen.

Systeme zur Verarbeitung analoger Signale werden auch *analoge Filter* genannt, solche zur Verarbeitung digitaler Signale entsprechend *digitale Filter*.

**1.6.1 Beispiele für natürliche Übertragungssysteme**

a) Die *akustischen Übertragungseigenschaften* eines Raumes. Dabei sind die Eingangssignale Tonsignale, die von einer Schallquelle erzeugt werden, und die Ausgangssignale die Tonsignale, die auf ein Ohr oder Mikrofon treffen. Der Raum kann ein Zimmer oder Saal, aber auch der Mund-Rachen-Raum oder der Gehörgang des Ohres sein.

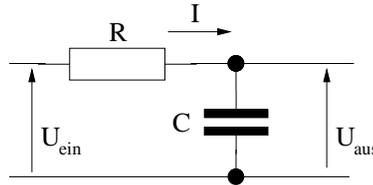
b) Bei *seismologischen Untersuchungen* liegen ähnliche Verhältnisse vor. Statt aus einem luftgefüllten Raum besteht das System aus der mehr oder weniger festen Erdkugel mit unterschiedlich dicken Schichten. Die Signalquelle ist ein Erdbeben oder eine Detonation.

c) Die *optischen Übertragungseigenschaften des Auges*. Siehe z.B. G. Hanske: *Systemtheorie der visuellen Wahrnehmung*, Teubner 1994.

d) Die *elektrischen Übertragungseigenschaften der Atmosphäre*: Beeinflussung der Ausbreitung von Funkwellen durch Reflektionen, Störungen, Rauschen, Variationen der Dielektrizitätskonstante und dadurch bedingte unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Diese Effekte müssen berücksichtigt werden, wenn man mit GPS sehr exakt navigieren will (GPS = Global Positioning System, ein satellitengestütztes Navigationssystem).

**1.6.2 Beispiele für künstliche Systeme**

a) Jede Art von Tonsignalübertragung und -beeinflussung z.B. Telefon, Audioverstärker, CD, Equalizer.



Sehr simples Tiefpaßfilter zur Dämpfung höherer Töne

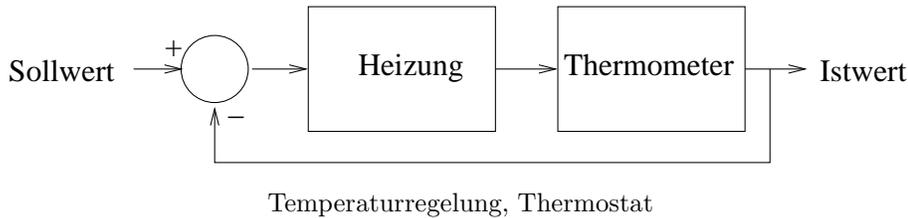
b) *Modulation* = Aufprägen eines Tonsignals auf eine hochfrequente Schwingung (die besser als das Tonsignal selbst von einem Übertragungsmedium übertragen wird oder von einer Antenne abgestrahlt wird). Im einfachsten Fall wird die Amplitude einer hochfrequenten Sinusschwingung im Rhythmus des Tonsignals verändert (Amplitudenmodulation).

c) *Demodulation* = Extraktion des Tonsignals aus einer modulierten Schwingung.

Elektronische Geräte, die Störungen entfernen oder zumindest vermindern, wie z.B. Rauschen und Knacken bei Tonaufnahmen oder Maschinenlärm.

d) Verfahren, die statistische Fluktuationen in einem gemessenen Signal entfernen; Mittelwertbildungen.

e) Geräte zur Regelung einer Größe auf einen Sollwert, z.B. Thermostate oder Autopiloten zur Steuerung von Fahrzeugen oder Flugzeugen. Solche Regelungssysteme setzen sich aus mehreren Teilsystemen und einer Rückkopplung zusammen.



### 1.6.3 Lineare Systeme

Signalverarbeitende Systeme werden nach den mathematischen Eigenschaften der von ihnen realisierten Operationen  $Q$  eingeteilt. Besonders wichtig sind folgende Eigenschaften.

- **Linearität**

Sind  $f_1, f_2$  zulässige Eingangssignale und sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , so gilt

$$Qf(t\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Qf_1 + \lambda_2 Qf_2$$

- **Translationsinvarianz**

Für jedes zulässige Eingangssignal  $f$  gilt

$$Qf(t + t_0) = Qf_{t_0}(t)$$

wobei  $f_{t_0}(t) := f(t + t_0)$  das um  $t_0$  verschobene Signal  $f$  ist.

- **Faltungsoperationen**

Es gibt ein Signal  $h$ , die sogenannte *Impulsantwort* von  $Q$ , so daß

$$Qf = h \star f$$

für alle zulässigen Eingangssignale  $f$ .

Mathematisch muß man hier aufpassen, ob und wie die Faltung zweier Signale definiert ist. Im einfachsten Fall gilt

für kontinuierliche Signale  $h, f \in L_1(\mathbb{R})$

$$h \star f(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s)f(t - s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(t - s)f(s)ds$$

und für diskrete Signale  $h, f \in L_1(\mathbb{Z})$

$$h \star f(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} h(s)f(t-s) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} h(t-s)f(s)$$

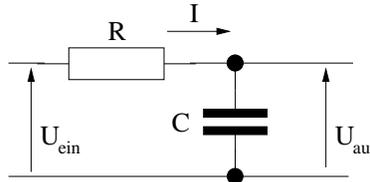
**Interpretation:** Das Ausgangssignal setzt sich additiv aus gewichteten Echos (d.h. zeitverschobenen Versionen) des Eingangssignals zusammen. Diese Situation kommt in sehr vielen Anwendungen vor.

### 1.6.4 Beispiele für Faltungsoperatoren

a) *Akustische Übertragungseigenschaften eines Raumes*

b) *Seismologische Signale, Funkwellen:* Das ursprüngliche Signal breitet sich über unterschiedliche Wege aus und wird an unterschiedlichen Schichten des Ausbreitungsmediums reflektiert und abgeschwächt. Alle diese Anteile addieren sich zum empfangenen Signal.

c) *Ein RC-Tiefpaßfilter*



Um das Übertragungsverhalten zu bestimmen, brauchen wir einige Gesetze aus der Elektrik.

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz gilt  $U_{\text{ein}} = U_R + U_{\text{aus}}$ .

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt  $U_R = R \cdot I$ .

Für die im Kondensator gespeicherte Ladung gilt  $q = C \cdot U_{\text{aus}}$ .

Außerdem gilt  $I = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_{\text{aus}}}{dt}$ , also  $U_R = RC \frac{dU_{\text{aus}}}{dt}$  und somit die Differentialgleichung

$$U'_{\text{aus}} = -\frac{1}{RC}U_{\text{aus}} + \frac{1}{RC}U_{\text{ein}}$$

Die Funktion  $e^{-\frac{t}{RC}}$  spannt den Lösungsraum der homogenen Gleichung auf. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich mit der Methode der Variation der Konstanten als

$$\begin{aligned} U_{\text{aus}}(t) &= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{s}{RC}} U_{\text{ein}}(s) ds \\ &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} U_{\text{ein}}(s) ds \\ &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0, \infty[}(t-s) e^{-\frac{t-s}{RC}} U_{\text{ein}}(s) ds, \end{aligned}$$

wobei  $\chi_{[0, \infty[}(x) = 1$ , wenn  $x \geq 0$ , und 0 sonst. Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$U_{\text{aus}}(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0, \infty[}(t-s) e^{-\frac{t-s}{RC}} U_{\text{ein}}(s) ds + \lambda e^{-\frac{t}{RC}} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

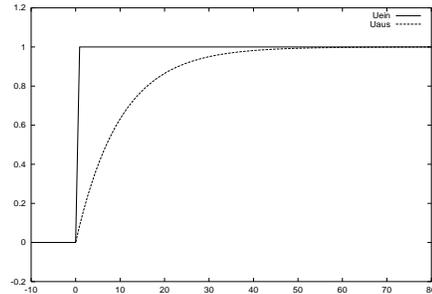
Der erste Term hat die Gestalt  $h \star U_{\text{ein}}(t)$  mit  $h(x) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{x}{RC}}$  für  $x \geq 0$  und 0 sonst. Er kann als eine Mittelung der vergangenen Eingangssignalwerte mit exponentiell abfallenden Gewichten verstanden werden, denn  $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1$ . Dadurch werden schnelle Variationen des Eingangssignals gedämpft. Der zweite Term klingt exponentiell schnell ab und spielt nach kurzer Zeit in der Praxis keine Rolle mehr.

*Beispiel:* Es sei  $U_{\text{aus}}(0) = 0$  und

$$U_{\text{ein}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Dann ist  $\lambda = 0$  und

$$U_{\text{aus}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-t/RC} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Allgemein sind Systeme, die durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden, Faltungsoperatoren.

d) *Diskrete exponentielle Mittelung*

Sei  $a \in ]0, 1[$ . Setze für  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Qf(t) = (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(t-k) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} h(s) f(t-s)$$

wobei  $h(s) = 0$ , wenn  $s < 0$ , und  $h(s) = (1-a)a^s$ , wenn  $s \geq 0$ .

Weil die Faltungssumme sich über unendlich viele Glieder erstreckt, muß sie in praktischen Anwendungen abgebrochen werden. Damit die Summe der Gewichte gleich 1 ist, wählt man

$$\tilde{Q}f(t) = (1-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k f(t-k) + a^n f(t-n)$$

Wenn  $n$  groß ist, kann der Rechenaufwand für schnelle Echtzeitanwendungen zu hoch sein. Durch einen kleinen Trick kann man ihn erheblich senken. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} Qf(t+1) &= (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(t-(k-1)) \\ &= (1-a)a \sum_{l=0}^{\infty} a^l f(t-l) + (1-a)f(t+1) \\ &= aQf(t) + (1-a)f(t+1) \end{aligned}$$

$Qf$  erfüllt also eine einfache Rekursionsgleichung und läßt sich damit ab einem gegebenen Zeitpunkt  $t_0$  mit gegebenem Anfangswert  $Qf(t_0)$  leicht und schnell berechnen. Sich einen Anfangswert vorzugeben bedeutet in der Praxis keine Einschränkung, weil jedes technische System erst zu einem gewissen Zeitpunkt eingeschaltet wird und irgendeinen Anfangszustand hat.

Rekursive Realisierungen wie in obigem Beispiel haben rechentechnisch oft erhebliche Vorteile. Deshalb gibt es detaillierte Untersuchungen von Systemen, deren Ausgangsfunktion einer linearen Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt. Sie sind das Analogon zu kontinuierlichen Systemen, die durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben sind. Solche kontinuierliche Systeme werden seit dem Entstehen der Elektronik mit passiven Bauteilen wie Widerständen, Kondensatoren, Spulen und aktiven Bauteilen wie Röhren, Transistoren, Operationsverstärkern realisiert.

Allerdings können solche rekursiven Systeme in der Praxis zu Instabilitäten neigen, und es ist oft schwierig, ein solches System mit dem gewünschten Verhalten zu konstruieren. Aufgrund der Schnelligkeit heutiger Rechner ist oft leichter, mit numerischen Methoden die Impulsantwort eines Faltungsoperators zu konstruieren, der mit guter Näherung die gewünschten Eigenschaften hat, und dann zu jedem Zeitpunkt die Faltungssumme mit einem schnellen Signalprozessor ausrechnen.

e) *Gleitende Mittel*

$$Qf(t) = \sum_{s=-k}^k w(s)f(t+s)$$

wobei  $w(s) \geq 0$  und  $\sum_{s=-k}^k w(s) = 1$ .

Solche Operatoren werden eingesetzt, um stochastische Fluktuationen (Rauschen) zu reduzieren. Sie sind *nicht kausal* d.h. die Berechnung von  $Qf(t)$  benötigt zukünftige Eingangswerte. Wenn die Variable  $t$  die Zeit ist, so können solche Systeme also nur mit einer gewissen Zeitverzögerung realisiert werden.

### Bemerkungen und Sprechweisen

*Faltungsoperatoren* sind *linear* und *translationsinvariant*. Die Umkehrung gilt unter geeigneten mathematischen Voraussetzungen. Deshalb wird in der Signalverarbeitungsliteratur der Begriff *lineares System* oder *lineares Filter* oft synonym zu Faltungsoperatoren benutzt. (Traditionellerweise wird in der Elektronik der Begriff *Filter* als Neutrum verwendet.) Die Anwendungsmöglichkeiten der linearen Systeme sind extrem vielfältig. Es gibt für sie eine ausgefeilte Theorie. Das liegt im wesentlichen daran, daß sie sich mit Hilfe der Fouriertransformation sehr anschaulich deuten und verstehen lassen. Für *nichtlineare Systeme* dagegen gibt es keine einheitliche Theorie. Manchmal lassen sie sich auf lineare Systeme und gewisse einfache nichtlineare Operationen wie Detektion von Maxima oder Nullstellen zurückführen.

Sehr wichtig wurden in den vergangenen Jahren *adaptive Systeme*, die sich über kürzere Zeitabschnitte nahezu wie lineare Systeme verhalten, über längere Zeitabschnitte hinweg jedoch ihre Parameter an die Erfordernisse der Anwendung und der Eingangsdaten anpassen. Typische Anwendungen sind die Unterdrückung von variablen Störungen oder Echos auf Datenübertragungsstrecken. Adaptive Systeme wurden bereits in den 60er Jahren untersucht und sind Vorläufer der Neuronalen Netze. Aber erst mit der Existenz schneller Signalprozessoren wurden sie praktisch einsetzbar.

## 1.7 Die Beschreibung kontinuierlicher Signale und Systeme im Frequenzbereich

Die klassische *Fouriertransformation* ist die injektive lineare Abbildung

$$L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), f \mapsto \hat{f} \text{ mit } \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\omega t}$$

Sie läßt sich kanonisch auf andere Räume von Signalen ausdehnen z.B. zu einem Hilbertraumisomorphismus  $L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  oder zu einem Isomorphismus  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  des Raums der temperierten Distributionen (mehr dazu später). Unter geeigneten Voraussetzungen (z.B.  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ) gilt

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Vermöge der Fouriertransformation wird also aus der Faltung einfach die Multiplikation! Folglich kann man mit Hilfe der Fouriertransformation *lineare Systeme* einfach beschreiben: Hat  $Q$  die Impulsantwort  $h$ , gilt also  $Qf = h \star f$ , so erhält man mit der Fouriertransformation

$$\widehat{Qf} = \hat{h} \cdot \hat{f}$$

Dies nennt man die Beschreibung des Systems  $Q$  im Frequenzbereich. Weil die Fouriertransformation injektiv ist, kann man  $Qf$  aus  $\widehat{Qf}$  zurückgewinnen, im einfachsten Fall durch die klassische Umkehrformel der Fouriertransformation

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t} d\omega \text{ für } f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$$

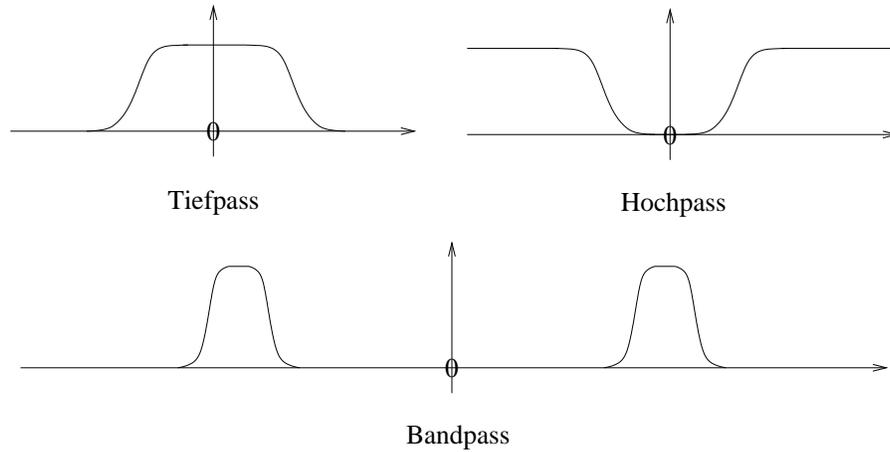
### Anschauliche Interpretation

$f$  ist als Überlagerung von kontinuierlich vielen harmonischen Schwingungen  $e^{2\pi i\omega t}$  dargestellt; die Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  hat die Amplitude  $|\hat{f}(\omega)|$  und ihre Phasenlage wird durch den Winkel der komplexen Zahl  $\hat{f}(\omega)$  bestimmt. (Man vergleiche die Entwicklung nach einer Orthonormalbasis in Hilberträumen, die allerdings stets nur abzählbar viele Terme  $\neq 0$  hat.)

$|\hat{f}|$  heißt das *Amplitudenspektrum* von  $f$ , und  $\hat{f}$  wird die *Darstellung von  $f$  im Frequenzbereich* genannt.

Das System  $Q$  verändert also lediglich die Amplitude und die Phasenlage der bei  $f$  beteiligten harmonischen Schwingungen. Daher werden solche Systeme oft *Filter* genannt; denn sie können manche Frequenzanteile hervorheben, andere abschwächen, je nachdem, ob  $|\hat{h}(\omega)| > 1$  oder  $< 1$  ist.  $\hat{h}$  wird die *Übertragungsfunktion* oder *Systemfunktion* von  $Q$  genannt.

Typische Beispiele für  $|\hat{h}|$



Die Charakterisierung erfolgt hier rein nach dem Amplitudenfrequenzgang  $|\hat{h}|$ . Die durch das System bewirkte Phasenverschiebung ist damit noch nicht festgelegt. Sie kann bei Anwendungen jedoch sehr wichtig sein.

Will man solche Filter tatsächlich bauen, so gibt es ganz wesentliche Einschränkungen an die Gestalt von  $\hat{h}$ . So muß  $\hat{h}$  z.B. eine rationale Funktion sein und nicht irgendeine Distribution, die sich aus theoretischen Überlegungen ergibt. Die Kunst besteht darin, einen gewünschten Amplituden- und Phasenfrequenzgang durch Funktionen  $\hat{h}$ , welche Übertragungsfunktionen realisierbarer Filter sind, genügend genau zu approximieren. Die Realisierung erfolgt mit analogen elektronischen Bauteilen wie Widerständen, Kondensatoren, Spulen, Operationsverstärkern.

## 1.8 Die Beschreibung diskreter Signale und Systeme im Frequenzbereich

Analog zur Fouriertransformation auf  $L_1(\mathbb{R})$  kann man eine Fouriertransformation auf  $l_1 = L_1(\mathbb{Z})$

$$L_1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}(S^1), f_d \mapsto \hat{f}_d$$

definieren. Sie führt in den Raum der stetigen Funktionen auf der Einheitskreislinie  $S^1$ . Sie hat die Gestalt

$$\hat{f}_d(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_d(k) z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_d(k) e^{-i\omega k},$$

wobei  $z = e^{i\omega} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ , und wird in der technischen Literatur *z-Transformation* genannt.

Es gilt die *Umkehrformel*

$$f_d(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in S^1} \hat{f}_d(z) z^{k-1} dz.$$

Damit erhält man wie im kontinuierlichen Fall eine Beschreibung diskreter Signale im Frequenzbereich. Weil auch die z-Transformation die Faltung in die Multiplikation überführt, lassen sich auch diskrete lineare Systeme wie die kontinuierlichen im Frequenzbereich beschreiben. Allerdings ist zu beachten, daß der Frequenzbereich jetzt kompakt ist, nämlich die Einheitskreislinie; meist parametrisiert man sie durch ein Intervall. Was dies in der Praxis bedeutet, wird deutlich, wenn man davon ausgeht, daß das diskrete Signale  $f_d$ , das man verarbeiten will, durch Abtastung eines kontinuierlichen Signals  $f$  in äquidistanten Zeitpunkten mit Abstand  $T > 0$  entstanden ist. Die *Nyquistbedingung* in Shannons Abtasttheorem besagt dann, daß die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  von  $f$  außerhalb des Intervalls  $]-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}[$  verschwindet. Anschaulich bedeutet dies wegen der Umkehrformel, daß  $f$  keine Schwingungen mit Frequenzen  $\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T}$  enthält. Die Abtastfrequenz  $\frac{1}{T}$  heißt *Nyquistfrequenz*; sie muß also mehr als doppelt so hoch sein wie die höchste Frequenz der in dem Signal enthaltenen harmonischen Schwingungen.

Parametrisiert man nun die Einheitskreislinie durch

$$\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \rightarrow S^1, \omega \mapsto e^{2\pi i T \omega}$$

so wird aus  $\hat{f}_d$  eine Funktion auf  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}[$  und die Umkehrformel lautet

$$f_d(k) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \hat{f}_d(e^{2\pi i T \omega k}) e^{2\pi i T \omega k} d\omega.$$

Wie im kontinuierlichen Fall gibt  $\hat{f}_d(e^{2\pi i T \omega k})$  an, mit welcher Amplitude und mit welcher Phasenlage die (diskrete) Schwingung

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{2\pi i T \omega t}$$

in  $f_d$  vorkommt.

Außerdem führt auch im diskreten Fall die Fouriertransformation die Faltung in die Multiplikation über. Für einen Faltungsoperator  $Q_d$  mit Impulsantwort  $h_d$  und jedes zulässige Eingangssignal  $f_d$  gilt also

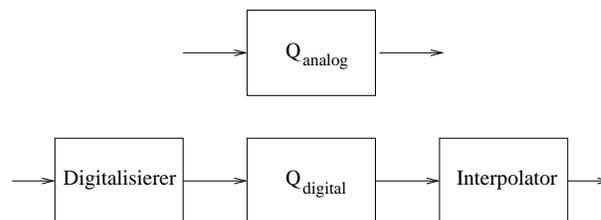
$$\widehat{Q_d(f_d)} = \widehat{h_d} \cdot \widehat{f_d}.$$

Somit kann man diskrete Übertragungssysteme, die durch Faltungsoperatoren definiert sind, analog zu den kontinuierlichen anschaulich im Frequenzbereich interpretieren.

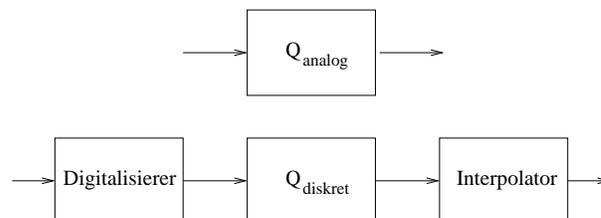
## 1.9 Simulation kontinuierlicher Systeme durch diskrete

Will man analoge Signale mit Digitalrechnern verarbeiten, so stellt sich das folgende

**Problem:** Wann gibt es zu einem analogen System  $Q_{\text{analog}}$  ein digitales System  $Q_{\text{digital}}$ , so daß die folgenden beiden Systeme Signale in gleicher Weise verarbeiten?



**Satz:** Zu jedem linearen analogen System  $Q_{\text{analog}}$  und jedem  $\beta > 0$  kann man einen Abtaster, ein diskretes System  $Q_{\text{diskret}}$  und einen Interpolator so angeben, daß die beiden Systeme



jedes Signal  $f$  mit Bandbreite  $< \beta$  (d.h.  $\hat{f}(\omega) = 0$  für  $|\omega| \geq \beta$ ) in gleicher Weise verarbeiten.

Um daraus eine Lösung des obigen Problems zu gewinnen, muß man noch quantisieren. Dabei geht i.a. die exakte Simulation des analogen Systems verloren. In vielen Fällen kann man jedoch den entstehenden Fehler genügend klein machen, indem die Auflösung der Quantisierung erhöht wird. Bei rekursiv realisierten Digitalfiltern kann es allerdings durch die Quantisierung zu unerwünschten Nebeneffekten kommen, weil sich kleine Restfehler hochschaukeln können.

Hält man die sogenannte Nyquist-Bedingung (Bandbreite von  $f < \frac{1}{2}$ ·Abtastfrequenz) nicht ein, so können sich erhebliche Abweichungen zu  $Q_{\text{analog}}$  ergeben (Aliaseffekte). Deshalb schaltet man ein analoges Tiefpaßfilter vor den Digitalisierer (Antialiasfilter).

#### Vorteile digitaler Filter

- Sehr gut reproduzierbar, kein Abgleich von Hardwarekomponenten nötig.
- Leicht zu verändern.

Das Antialiasfilter ist meist einfach und unkritisch mit analoger Hardware realisierbar.

#### Nachteile digitaler Filter

- Nicht oder nur beschränkt einsetzbar für Signale mit hoher Frequenz, weil die Signale nicht oder nur mit geringer Auflösung digitalisiert werden können.
- Die benötigte Rechenleistung kann für Echtzeitanwendungen sehr hoch sein, insbesondere bei hohen Abtastraten. Der Einsatz spezieller digitaler Signalprozessoren kann nötig sein. Sie sind so konstruiert, daß sie die Faltung sehr schnell ausführen können.

## 1.10 Die zeitliche Begrenzung von Signalen

In der Praxis schaltet man Sensoren und Systeme zu einem Zeitpunkt  $t_0$  ein und meist auch irgendwann wieder ab. Es liegt also nicht die ideale Situation vor, daß die Signale auf ganz  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Z}$  definiert sind. Vielmehr hat man es mit Anfangswertproblemen zu tun; die Systeme starten mit einem vorgegebenen Anfangszustand. Sind sie durch Differential- oder Differenzgleichungen gegeben, so führt dies auf die üblichen Anfangswertprobleme. Ein starkes Instrument zu ihrer theoretischen Lösung ist die Laplacetransformation (im wesentlichen eine einseitige Fouriertransformation).

Für praktische numerische Berechnungen muß man die Signale auf endliche Intervalle beschränken, insbesondere muß man die Fouriertransformation auf  $\mathbb{Z}$  durch die diskrete Fouriertransformation (DFT) ersetzen. Die DFT ist ein Automorphismus des Raumes der (komplexwertigen) Funktionen auf der Menge  $\{0, \dots, N-1\}$ , die mit  $\mathbb{Z}_N$  identifiziert wird:

$$\hat{f}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{2\pi i}{N} jk}$$

mit der Inversen

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}(j) e^{\frac{2\pi i}{N} jk}$$

Wir werden später zeigen, daß sowohl die Abtastung als auch die zeitliche Beschränkung kontinuierlicher Signale Operationen sind, die im Frequenzbereich eine Verschmierung bewirken, hervorgerufen durch Faltungsoperationen. Werden beide kombiniert und wird dann noch das Resultat wie bei der Berechnung der DFT in diskreten Frequenzen abgetastet, so muß man bei der Interpretation des Resultats sehr aufpassen, um keinen Fehlschlüssen zu erliegen. Denn das Resultat hat oft überhaupt keine offensichtliche Ähnlichkeit mit einer Abtastung der Fouriertransformierten des kontinuierlichen Signals.



# Kapitel 2

## Diskrete Signale und Systeme

### 2.1 Signale

Obwohl man es in der Praxis meist mit Signalen endlicher Dauer zu tun hat, ist es für die mathematische Modellierung zunächst einfacher, Signale unbegrenzter Dauer zu betrachten und diskrete Signale als Funktionen  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  zu modellieren. Wir beschränken uns hier auf eindimensionale Signale; die meisten Betrachtungen lassen sich aber unmittelbar auf höherdimensionale Signale übertragen.

Ein diskretes Signal ist also einfach eine Folge komplexer Zahlen. Wir bezeichnen die Menge der komplexen Zahlenfolgen mit  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ . Sie ist ein Vektorraum, hat aber sonst keine besondere Struktur, die für die Signalanalyse hilfreich ist. Deshalb betrachtet man oft Untervektorräume, die mehr Struktur tragen.

#### 2.1.1 Einige Räume diskreter Signale

- a) Der Raum  $\mathcal{K}(\mathbb{Z})$  der Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit beschränktem, also endlichem Träger  $\{t \in \mathbb{Z}: f(t) \neq 0\}$ .  
 $\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)|: t \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Norm auf diesem Raum.
- b) Der Raum  $\mathcal{C}_b(\mathbb{Z})$  der beschränkten Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
 $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)|: t \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
- c) Der Raum  $L_1(\mathbb{Z})$  der Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |f(t)| < \infty$ .  
 $\|f\|_1 = \sum_{t \in \mathbb{Z}} |f(t)|$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
- d) Der Raum  $L_2(\mathbb{Z})$  der Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |f(t)|^2 < \infty$ .  
 $\|f\|_2 = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist. Er ist aber sogar ein Hilbertraum, weil die Norm von dem Skalarprodukt  $\langle f|g \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \overline{f(t)}g(t)$  herkommt. Es ist  $L_1(\mathbb{Z}) \subset L_2(\mathbb{Z})$ .

Anschaulich sind die Signale in  $L_2(\mathbb{Z})$  diejenigen, die endliche Energie haben; denn  $|f(t)|^2$  ist proportional zur Leistung im Zeitpunkt  $t$ , und die Energie ist das Integral über die Leistung.

#### 2.1.2 Beispiele für diskrete Signale

##### a) Impulse:

Für  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $\delta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\delta_k$  heißt der *Einheitsimpuls* an der Stelle  $k$ . Ein allgemeiner Impuls entsteht aus einem Einheitsimpuls durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Die Einheitsimpulse bilden eine Basis in  $\mathcal{K}(\mathbb{Z})$ , eine Schauderbasis in  $L_1(\mathbb{Z})$  und eine Orthonormalbasis in  $L_2(\mathbb{Z})$ , denn es gilt  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\delta_k$ , wobei die Reihe bezüglich der jeweiligen Norm konvergiert.

- b) Als **Sprungfunktionen** (step functions) bezeichnet man die charakteristischen Funktionen der Halbstrahlen  $[k, \infty[$ , also die Funktionen  $\text{step}_k$  mit  $\text{step}_k(t) = 1$  für  $t \geq k$  und 0 sonst. Für  $k = 0$  spricht man auch von der *diskreten Heavisidefunktion*.

Man beachte, daß  $\text{step}_k$  eine Art diskrete Stammfunktion von  $\delta_k$  ist und somit  $\delta_k$  als eine Art Ableitung von  $\text{step}_k$  angesehen werden kann.

### 2.1.3 Verschiebung und Spiegelung von Signalen

Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  seien die Signale  $\tau_k f$  und  $f_-$  definiert als  $\tau_k f(t) = f(t - k)$  und  $f_-(t) = f(-t)$  für alle  $t \in \mathbb{Z}$ . Die Verschiebung  $\tau_k$  und die Spiegelung sind Automorphismen von  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ .

## 2.2 Systeme

**2.2.1 Definition** Ein *diskretes System* auf  $\mathbb{Z}$  ist eine Abbildung  $Q: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ , wobei  $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  der Definitionsbereich von  $Q$  ist.

In dieser Allgemeinheit kann man mit diesem Begriff nicht viel anfangen; interessant sind Systeme mit zusätzlichen Eigenschaften.

**2.2.2 Definition** Ein System  $Q: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  heißt

- linear*, wenn  $\mathcal{I}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  ist und  $Q$  linear ist.
- translationsinvariant*, wenn  $\tau_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  und  $\tau_k \circ Q = Q \circ \tau_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt.
- ohne Gedächtnis*, wenn zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{Z}$  der Wert  $Qf(t)$  nur von  $f(t)$  abhängt.
- kausal*, wenn  $f \in \mathcal{I}$  und  $f(t) = 0$  für  $t < k$  stets impliziert, daß auch  $Qf(t) = 0$  für  $t < k$ . Das heißt, daß das System nicht auf Eingangssignalwerte reagiert, die erst in der Zukunft kommen. In Anwendungen ist eine Verletzung der Kausalität problematisch, wenn die Signalvariable die Zeit ist; ist sie dagegen ein Ort, so greift ein nichtkausales System einfach auf Werte links und rechts zu.
- stabil*, wenn  $\mathcal{C}_b(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{I}$  und für jedes  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{Z})$  auch  $Qf \in \mathcal{C}_b(\mathbb{Z})$  ist, d.h. wenn für jedes beschränkte Eingangssignal auch das Ausgangssignal beschränkt ist.

### 2.2.3 Beispiele

- $Qf(t) = (f(1))^2$  für  $t \in \mathbb{Z}$  und  $f \in \mathcal{I} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  ist weder linear noch translationsinvariant noch kausal noch ohne Gedächtnis, aber stabil.
- $Qf(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} f(t - k)$  ist für jedes  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  definiert.  $Q$  ist aber nicht stabil; denn für  $f = \text{step}_0$  gilt  $Qf(t) = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k}$ , also  $\lim_{t \rightarrow \infty} Qf(t) = \infty$ .  
 $Q$  ist linear, translationsinvariant, kausal und hat Gedächtnis.
- $Qf(t) = f(t) - f(t - 1)$  ist für jedes  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  definiert.  $Q$  entspricht der (linksseitigen) Differentiation im kontinuierlichen Fall.  $Q$  ist linear, translationsinvariant, kausal und hat Gedächtnis.  $Q$  ist auch stabil, ganz im Gegensatz zur Differentiation im kontinuierlichen Fall (überlegen!).  $Q$  ist nicht die einzige Möglichkeit, die Differentiation diskret nachzuahmen.
- $Qf(t) = \sum_{k=-n}^m w(k) f(t - k)$ , wobei  $m, n \geq 0$ , alle  $w(k) \geq 0$  und  $\sum_{k=-n}^m w(k) = 1$  seien.  $Q$  ist eine lokale Mittelwertbildung, die für alle  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  definiert ist.  $Q$  ist linear und stabil.  $Q$  ist kausal, wenn  $n = 0$ .  
definiert

## 2.3 Die Faltung

**2.3.1 Definition** Sind  $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  und konvergiert  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(t - k)g(k)|$  für jedes  $t \in \mathbb{Z}$ , so heißt die Funktion

$$f \star g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \star g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t - k)g(k)$$

die *Faltung* von  $f$  mit  $g$ .

**Bemerkung:** Dadurch daß wir die absolute Konvergenz der Reihe fordern, kommt es nicht auf die Reihenfolge der Glieder an.

### 2.3.2 Lemma

a) Sind  $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  und konvergiert  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(t-k)g(k)|$  für jedes  $t \in \mathbb{Z}$ , so existieren  $f \star g$  und  $g \star f$  und sind gleich.

b) Für  $f, g, h \in L_1(\mathbb{Z})$  gilt

$$\begin{aligned} f \star g &\in L_1(\mathbb{Z}) \\ \|f \star g\|_1 &\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \\ f \star (g \star h) &= (f \star g) \star h \\ (f + g) \star h &= f \star h + g \star h \end{aligned}$$

c) Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  und jedes  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  gilt

$$\delta_k = \tau_k \delta_0 \quad \text{und} \quad \tau_k f = f \star \delta_k$$

d) Für  $f, g \in L_2(\mathbb{Z})$  existiert  $f \star g$ , denn es gilt  $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ .

**Bemerkung:** Mit der Faltung  $L_1(\mathbb{Z}) \times L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z})$  als Multiplikation wird  $L_1(\mathbb{Z})$  also eine Banachalgebra.

**Beweis:**

a) Durch Umindizierung  $l = t - k$  folgt

$$\begin{aligned} f \star g(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t-k)g(k) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l)g(t-l) \\ &= g \star f(t) \end{aligned}$$

b) Wegen der absoluten Konvergenz kann man die Glieder der Doppelfolge  $(f(l-k)g(k))_{l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$  in beliebiger Reihenfolge summieren; somit gilt

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_1 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(l-k)g(k) \right| \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(l-k)g(k)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(k)| \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(l-k)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(k)| \cdot \|\tau_k f\|_1 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(k)| \cdot \|f\|_1 \\ &= \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 \end{aligned}$$

Die anderen Gleichungen ergeben sich durch geeignete Änderungen der Summationsreihenfolge.

c) folgt durch Einsetzen der Definitionen und Nachrechnen; d) aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. q.e.d.

**2.3.3 Satz** Eine Abbildung  $Q: L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z})$  ist genau dann linear, translationsinvariant und stetig, wenn es ein  $h \in L_1(\mathbb{Z})$  gibt, so daß  $Qf = h \star f$  für jedes  $f \in L_1(\mathbb{Z})$ , also  $Qf(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)f(t-k)$ .

**Beweis:** Gibt es ein  $h$  wie angegeben, so ist  $Q$  linear und translationsinvariant und aus Teil b) des obigen Lemmas folgt, daß  $Q$  stetig ist.

Sei umgekehrt  $Q$  linear, translationsinvariant und stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 Qf &= Q\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\delta_k\right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)Q(\delta_k) \quad \text{wegen der Linearität und Stetigkeit} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)Q(\tau_k\delta_0) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\tau_k Q(\delta_0) \quad \text{wegen der Translationsinvarianz} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)Q(\delta_0) \star \delta_k \\
 &= Q(\delta_0) \star \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\delta_k\right) \quad \text{wegen der Linearität und Stetigkeit der Faltung} \\
 &= Q(\delta_0) \star f
 \end{aligned}$$

Setze  $h = Q(\delta_0)$ .

q.e.d.

## 2.4 Diskrete LTI-Systeme

**2.4.1 Definition** Ein *diskretes LTI-System* mit *Impulsantwort*  $h \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  ist eine Abbildung  $Q: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ , für die gilt

- a)  $\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}: \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)f(j-k)| < \infty \text{ für jedes } j \in \mathbb{Z}\}$
- b)  $Qf = h \star f$  für jedes  $f \in \mathcal{I}$ .

### 2.4.2 Bemerkungen und Definitionen

1.  $\delta_0$  ist im Definitionsbereich jedes diskreten LTI-System, und es gilt  $h = Q\delta_0$ . Das erklärt den Namen *Impulsantwort*.  $h$  ist durch  $Q$  eindeutig bestimmt und umgekehrt.
2. Ist  $\text{step}_0$  im Definitionsbereich von  $Q$ , so heißt  $Q(\text{step}_0)$  die *Sprungantwort* von  $Q$ .
3. Bei Bedarf werden wir den Definitionsbereich manchmal auch kleiner wählen.

**2.4.3 Sprechweisen:** Häufig bedient man sich etwas laxer Bezeichnungen, wenn aus dem Kontext klar ist, was gemeint ist. Mit dem Begriff *lineares System* meint man meist ein LTI-System; wenn man tatsächlich die Translationsinvarianz nicht fordert, so drückt man dies explizit aus, z.B. indem man das System *zeitabhängig* oder *ortsabhängig* nennt. Statt System sagt man auch *Filter*; häufig wird unter Filter sogar ein LTI-System verstanden, und wenn man die Linearität nicht fordert, spricht man von einem *nichtlinearen Filter*.

### 2.4.4 Satz

- a) Die Hintereinanderausführung von LTI-Systemen ist wieder ein LTI-System.
- b) Ein diskretes LTI-System ist genau dann kausal, wenn seine Impulsantwort  $h$  auf allen negativen Zahlen verschwindet.

**2.4.5 Definition** Ein diskretes LTI-System heißt ein *FIR-System*, wenn seine Impulsantwort endlichen Träger hat (also außerhalb einer endlichen Menge verschwindet); anderenfalls heißt es ein *IIR-System*. FIR steht für *Finite Impuls Response* und IIR für *Infinite Impuls Response*.

FIR-Systeme sind im Prinzip mit Rechnern realisierbar, weil sich die Faltungssumme nur über endlich viele Indizes erstreckt. Dagegen scheinen IIR-Systeme zunächst nicht realisierbar zu sein, höchstens näherungsweise. Wir werden aber später sehen, daß viele IIR-Systeme rekursiv realisiert werden können.

**2.4.6 Satz** Für ein LTI-System  $Q$  mit Impulsantwort  $h$  und Definitionsbereich  $\mathcal{I}$  gilt

$$h \in L_1(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow Q \text{ stabil} \Leftrightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \subset \mathcal{I}$$

**Beweis:** Für jedes beschränkte Signal  $f$  gilt

$$|h \star f(t)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)f(t-k)| \leq \|h\|_1 \|f\|_\infty$$

Daraus folgt die Richtung von links nach rechts in der ersten Äquivalenz. Die gleiche Richtung in der zweiten gilt gemäß Definition der Stabilität.

$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \subset \mathcal{I} \Leftrightarrow h \in L_1(\mathbb{Z})$  ergibt sich so: Setze  $f(k) = \overline{h(-k)}/|h(-k)|$ . Dann ist  $f$  beschränkt, also im Definitionsbereich von  $Q$ , und es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)f(-k) = Qf(0) < \infty$$

q.e.d.

### 2.4.7 Folgerung

- a) Ein FIR-System ist stets stabil, und alle Signale sind als Eingangssignale zulässig.
- b) Ein IIR-System, dessen Impulsantwort nicht in  $L_1(\mathbb{Z})$  liegt, ist nicht stabil.

## 2.5 Einseitige Zeitbeschränkung

In Anwendungen wird man die Ausgangswerte eines Systems meist erst ab einem Zeitpunkt  $t_0$  beobachten und verwenden oder das System sogar erst zu diesem Zeitpunkt in Betrieb nehmen. Die Vorgeschichte bis zum Zeitpunkt  $t_0$  interessiert nur insofern, als sie die weiteren Ausgangswerte in den Zeitpunkten  $t > t_0$  betrifft. Das System muß sich in einem Gedächtnisspeicher alle Eingangswerte merken, die zur Berechnung künftiger Ausgangswerte gebraucht werden. Wenn das System erst zum Zeitpunkt  $t_0$  eingeschaltet wird, muß festgelegt werden, wie der Gedächtnisspeicher initialisiert wird.

Meist wählt man  $t_0 = 0$ . Initialisiert man den Gedächtnisspeicher eines LTI-Systems mit lauter Nullen, könnte man auch sagen, daß man nur Eingangssignale zuläßt, die für  $t < 0$  verschwinden; solche Signale nennt man auch *kausal*.

Eine beliebige Initialisierung des Gedächtnisspeichers ist nur realisierbar, wenn das Gedächtnis endlich ist, d.h. bei LTI-Systemen, daß ihre Impulsantwort  $h$  nur für endlich viele  $t > 0$  von Null verschieden ist. Verlangt man noch zusätzlich, daß das System kausal ist, so muß die Impulsantwort  $h$  endlichen Träger haben, also das System ein FIR-System sein.

IIR-Systeme haben zwar ein unendliches Gedächtnis, sie lassen sich aber oft durch eine Rekursionsgleichung beschreiben, in der nur endlich viele Eingangswerte und Ausgangswerte aus der Vergangenheit vorkommen. Man spricht dann von rekursiven Systemen. Diese endlich vielen Werte beschreiben zum Zeitpunkt  $t_0$  den Anfangszustand des Systems und können beliebig vorgegeben werden. Initialisiert man sie alle mit Null, so nennt man das System *relaxiert*.



# Kapitel 3

## Beschreibung diskreter LTI-Systeme im Frequenzbereich

Aus rein mathematischer Sicht sind diskrete Signale einfach Funktionen auf  $\mathbb{Z}$ . In Anwendungen jedoch entstehen diskrete Signale oft durch Abtastung kontinuierlicher Signale, und dann kann es wichtig sein, die Schrittweite  $T$  der Abtastung zu berücksichtigen, vor allem wenn man gleichzeitig mit diskreten Signalen arbeitet, die durch unterschiedlich schnelle Abtastung entstanden sind. Wir werden deshalb in der folgenden Darstellung explizit eine Abtastschrittweite  $T > 0$  mitführen.

### 3.1 Die Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{Z})$

Für  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  sei die *Fouriertransformierte*  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert als

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i T \nu k} \quad \text{für } \nu \in \mathbb{R}.$$

Weil  $f$  in  $L_1(\mathbb{Z})$  ist, konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig; folglich ist  $\hat{f}$  stetig. Außerdem ist  $\hat{f}$  periodisch mit Periode  $\frac{1}{T}$ .

Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich die *Umkehrformel*

$$f(k) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i T \nu k} d\nu.$$

Die *Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}: L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto \hat{f}$$

ordnet jeder Funktionen aus  $L_1(\mathbb{Z})$  eine stetige, periodische Funktionen mit Periode  $\frac{1}{T}$  zu. Die Umkehrtransformation ordnet jeder stetigen, periodischen Funktion  $g$  mit Periode  $\frac{1}{T}$  eine Funktion  $\check{g}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  zu, die durch

$$\check{g}(k) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} g(\nu) e^{2\pi i T \nu k} d\nu$$

gegeben ist.  $\check{g}(-k)$  ist einfach der  $k$ -te Koeffizient der Fourierreihe von  $g$ .

#### 3.1.1 Einige Eigenschaften der Fouriertransformation

Für  $f, g \in L_1(\mathbb{Z})$  gilt

- a)  $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
- b)  $f$  ist genau dann reellwertig, wenn  $\hat{f}$  konjugiert komplex symmetrisch ist, d.h. wenn  $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$ .
- c)  $\widehat{\tau_k f}(\nu) = \hat{f}(\nu) \cdot e^{-2\pi i T \nu k}$
- d) die Parsevalsche Identität

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \overline{g(k)} = \langle f | g \rangle$$

insbesondere  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

- e)  $\widehat{\delta_m}(\nu) = \exp(-2\pi i T \nu m)$ .

## 3.2 Stabile LTI-Systeme

Die Funktionen

$$\exp_\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp_\omega(t) = e^{2\pi i \omega t}.$$

bezeichnen wir als *harmonische Schwingungen* mit der Frequenz  $\omega$ .

Tastet man so eine Schwingung mit Schrittweite  $T$  ab, so erhält man eine *diskrete harmonische Schwingung*

$$\exp_{\omega, T}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp_{\omega, T}(k) = e^{2\pi i T \omega k}.$$

Jede dieser Funktionen ist beschränkt; sie liegen aber nicht in  $L_1(\mathbb{Z})$ . Trotzdem können sie mit jeder Funktion  $h \in L_1(\mathbb{Z})$  gefaltet werden, weil

$$|h \star \exp_{\omega, T}(t)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k) \exp_{\omega, T}(t - k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < \infty.$$

$Q$  sei ein stabiles LTI-System mit Impulsantwort  $h \in L_1(\mathbb{Z})$ .

Dann gilt für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q(\exp_{\omega, T})(j) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{2\pi i T \omega (j - k)} \\ &= e^{2\pi i T \omega j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-2\pi i T \omega k} \\ &= \hat{h}(\omega) \exp_{\omega, T}(j) \end{aligned}$$

also

$$Q(\exp_{\omega, T}) = \hat{h}(\omega) \exp_{\omega, T}$$

**3.2.1 Folgerung** Jedes stabile LTI-System hat die Funktionen  $\exp_{\omega, T}$  als Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\hat{h}(\omega)$ .

**3.2.2 Folgerung** Ein stabiles LTI-System produziert am Ausgang keine Frequenzanteile, die am Eingang nicht vorhanden sind.

**Anschaulich bedeutet dies:** Die Antwort eines stabilen LTI-Systems auf eine harmonische Schwingung der Frequenz  $\omega$  ist wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz; lediglich die Amplitude wird mit  $|\hat{h}(\omega)|$  multipliziert und die Phase um  $\arg \hat{h}(\omega)$  verschoben.

**Bezeichnungen** Die Funktion  $\hat{h}$  nennt man die *Übertragungsfunktion* des Systems, die Funktion  $|\hat{h}|$  den *Amplitudenfrequenzgang* und die Funktion  $\arg \hat{h}$  den *Phasenfrequenzgang*. Alle drei sind periodisch mit Periode  $\frac{1}{T}$ .

### 3.2.3 Normierung des Frequenzbereichs

Als Frequenz einer periodischen Schwingung bezeichnet man die Anzahl der Perioden pro Sekunde. Als Einheit

wählt man Hertz, wobei  $1\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$ .

Bei einer harmonischen Schwingung  $\exp_{\omega}(t) = e^{2\pi i\omega t}$  oder  $\sin 2\pi\omega t$  oder  $\cos 2\pi\omega t$  ist  $\omega$  die Frequenz.

**3.2.3.1 Lemma** Ist  $f = \exp_{\omega}$  eine harmonische Schwingung und ist  $T > 0$  eine Abtastschrittweite, so daß  $|\omega| < \frac{1}{2T}$ , so ist die Frequenz  $\omega$  durch die Abtastwerte  $(f(kT))_{k \in \mathbb{Z}}$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Seien  $\omega, \nu \in ]-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}[$  und gelte  $e^{2\pi i\omega kT} = e^{2\pi i\nu kT}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Daraus folgt  $(e^{2\pi i(\omega-\nu)T})^k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dies kann nur gelten, wenn  $e^{2\pi i(\omega-\nu)T} = 1$ , also  $\omega - \nu = \frac{n}{T}$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Wegen  $|\omega - \nu| < \frac{1}{T}$  muß  $n = 0$  sein, also  $\omega = \nu$ . q.e.d.

Dies ist ein Spezialfall des Abtasttheorems von Shannon, das später bewiesen werden wird.

Ist die sogenannte Nyquistbedingung  $|\omega| < \frac{1}{2T}$  nicht erfüllt, so wird die Aussage des Lemmas falsch: Gilt z.B. nur  $|\omega| \leq \frac{1}{2T}$ , so hat die Schwingung  $\exp_{\frac{1}{2T}}$  in den Abtastpunkten  $kT$  dieselben Werte wie die konstante Funktion  $1 = \exp_0$ .

Deshalb setzt man voraus, daß in den betrachteten Signalen keine Frequenzanteile mit Frequenzen  $|\omega| \geq \frac{1}{2T}$  vorhanden sind. Dies paßt damit zusammen, daß die Fouriertransformierten der diskreten Abtastsignale mit der Periode  $\frac{1}{T}$  periodisch sind. Diese Funktionen sind also bereits durch ihre Werte auf dem Intervall  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}[$  bestimmt.

Um Untersuchungen unabhängig von der Schrittweite  $T$  formulieren zu können, führt man die sogenannte relative Frequenz  $\rho = \frac{\nu}{T} = T\nu$  ein, die in dem normierten Frequenzbereich  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  variiert.

### 3.2.4 Negative Frequenzen

Ist  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  reellwertig, so gilt  $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$ , und wegen der Umkehrformel folgt, daß  $f$  bereits durch die Werte von  $\hat{f}$  auf  $[0, \infty[$ , also durch die Anteile mit positiver Frequenz bestimmt ist.

Ist  $f$  nicht reellwertig, so gilt dies nicht mehr; man kann den Wert von  $\hat{f}$  in  $\nu$  nicht mehr aus dem an der Stelle  $-\nu$  bestimmen.

Harmonische Schwingungen liegen zwar nicht in  $L_1(\mathbb{Z})$ , man kann aber ähnliche Überlegungen direkt im Zeitbereich anstellen:

Eine reelle harmonische Schwingung hat die Gestalt

$$f_{\omega}(t) = C \sin(2\pi\omega t + \varphi) \text{ mit } \varphi \in [-\pi, \pi[.$$

Äquivalent dazu ist die Darstellung

$$f_{\omega}(t) = A \sin(2\pi\omega t) + B \cos(2\pi\omega t),$$

wobei  $A = C \cos \varphi, B = C \sin \varphi$  oder umgekehrt  $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \sin \varphi = \frac{B}{C}, \cos \varphi = \frac{A}{C}$ .

Eine reelle harmonische Schwingung der Frequenz  $-\omega$  läßt sich durch eine zeitverschobene Schwingung der Frequenz  $\omega$  ausdrücken:

$$f_{-\omega}(t) = C \sin(2\pi(-\omega)t + \varphi) = -C \sin(2\pi\omega t - \varphi)$$

oder

$$f_{-\omega}(t) = A \sin(2\pi(-\omega)t) + B \cos(2\pi(-\omega)t) = -A \sin(2\pi\omega t) + B \cos(2\pi\omega t)$$

Dies stimmt nicht für komplexwertige harmonische Schwingungen! Sie haben die Gestalt  $f_{\omega}(t) = A e^{2\pi i\omega t + i\varphi}$ . Ist  $\omega \in \mathbb{R}$ , so gilt für kein  $\xi \neq \omega$  und  $\psi \in [-\pi, \pi[$ , daß  $e^{2\pi i\omega t + i\varphi} = e^{2\pi i\xi t + i\psi}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , denn sonst müßte  $(\omega - \xi)t + \psi - \varphi \in \mathbb{Z}$  für alle  $t$  sein.

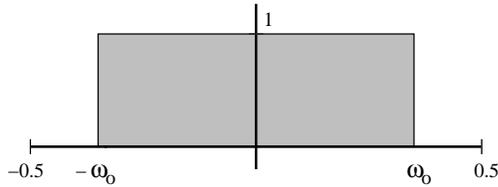
Eine komplexe harmonische Schwingung ist ein Paar von phasenstarr gekoppelten reellen harmonischen Schwingungen mit Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$  oder  $-\frac{\pi}{2}$ . Ein Paar mit Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$  kann nicht durch eine Zeitverschiebung zu einem Paar mit Phasendifferenz  $-\frac{\pi}{2}$  werden. Diese Tatsache wird z.B. bei inkrementalen Positionsgebern zur Richtungsbestimmung ausgenutzt, allerdings verwendet man dort meist Rechteckschwingungen. Phasenstarr gekoppelte harmonische Schwingungen mit Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$  spielen eine wichtige Rolle in der Nachrichtentechnik (komplexe Mischer, Costas-Mischer).

### 3.3 Ideale Bandfiltercharakteristiken

LTI-Systeme werden grob eingeteilt nach dem qualitativen Verlauf ihres Amplitudenfrequenzgangs. Dabei orientiert man sich an idealen Filtertypen, deren Amplitudenfrequenzgang die charakteristische Funktion von Intervallen ist. Meist will man, daß reelle Eingangssignale reelle Ausgangssignale erzeugen. Dies ist gewährleistet, wenn die Impulsantwort  $h$  des Systems reellwertig ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn die Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  konjugiert komplex symmetrisch ist. Deshalb fordert man bei idealen Bandfiltertypen einen symmetrischen Verlauf des Amplitudenfrequenzganges.

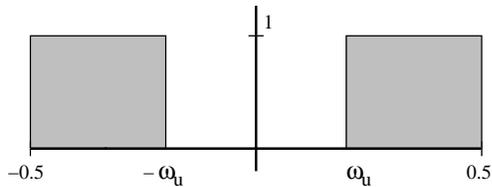
Seien  $0 \leq \omega_u \leq \omega_o$ .

## 3.3.1 Ideale Tiefpaßfilter



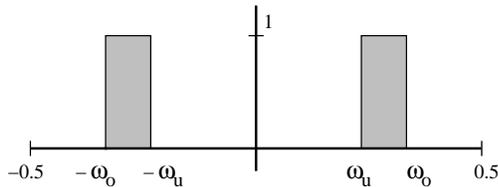
$$|\hat{h}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq \omega_o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 3.3.2 Ideale Hochpaßfilter



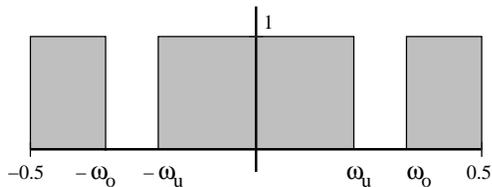
$$|\hat{h}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \geq \omega_u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 3.3.3 Ideale Bandpaßfilter



$$|\hat{h}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega_u \leq |\omega| \leq \omega_o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

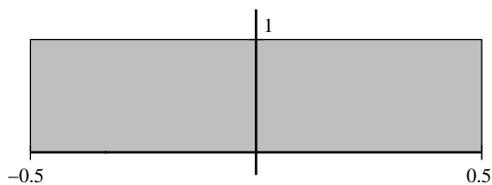
## 3.3.4 Ideale Bandsperrefilter



$$|\hat{h}(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_u \leq |\omega| \leq \omega_o \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist  $\omega_u = \omega_o$ , so spricht man von einem **Kerb-** oder **Notch-Filter**.

## 3.3.5 Ideale Allpaßfilter



$$|\hat{h}(\omega)| = 1 \quad \text{für alle } \omega$$

Allpaßfilter bewirken nur Phasenverschiebungen. Anwendungen dafür werden später erklärt werden. Von den anderen idealen Filtern zeigen wir, daß sie nicht praktisch realisierbar sind, sondern nur angenähert werden können.

**3.3.6 Satz** Ist der Träger von  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  nach unten beschränkt und ist  $f \neq 0$ , so verschwindet  $\hat{f}$  höchstens auf einer Lebesgueschen Nullmenge.

**Beweis:** Es gelte  $f(k) = 0$  für  $k < l$ . Setze  $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+l)z^n$ . Weil  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  ist, konvergiert diese Potenzreihe für  $|z| = 1$  absolut und stellt somit in der offenen Einheitskreisscheibe eine holomorphe Funktion dar.

Für  $z = e^{2\pi iT\nu}$  ist

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+l) e^{2\pi iT\nu n} \\ &= e^{-2\pi iT\nu l} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{2\pi iT\nu k} \\ &= e^{-2\pi iT\nu l} \hat{f}(-\nu)\end{aligned}$$

Annahme:  $\hat{f}$  verschwindet auf einer Menge mit positivem Maß. Dann verschwindet  $\psi$  auf einer Teilmenge  $M$  der Einheitskreislinie  $S^1$  mit positivem Bogenmaß.  $M$  muß dann einen Häufungspunkt haben. Ist  $\psi$  auch auf der Einheitskreislinie holomorph (also in einer Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe), so folgt aus dem Identitätssatz  $\psi = 0$ . Ist  $\psi$  auf der Einheitskreislinie nicht holomorph, so benötigt man einen allgemeineren Identitätssatz aus der Theorie der Hardy-Räume (siehe z.B. *Rudin: Real and Complex Analysis*, Satz 17.18). In jedem Falle folgt also  $\hat{f} = 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung. q.e.d.

**3.3.7 Folgerung** Ein stabiles, kausales LTI-System hat keine ideale Bandfiltercharakteristik.

**Bemerkungen** Die obige Aussage gilt auch ohne die Stabilitätsforderung. Nichtkausale LTI-Systeme können ideale Bandfiltercharakteristik haben. Wie wir später sehen werden, haben ihre Impulsantworten dann aber keine beschränkten Träger; folglich sind sie in der Praxis nicht wirklich realisierbar, zumindest nicht vermöge der direkten Berechnung der Faltungssumme.

Es stellt sich die Frage, wann eine vorgegebene Funktion der Amplitudenfrequenzgang eines kausalen LTI-Systems ist. Eine Antwort gibt der folgende Satz.

**3.3.8 Satz (Paley-Wiener 1934)**

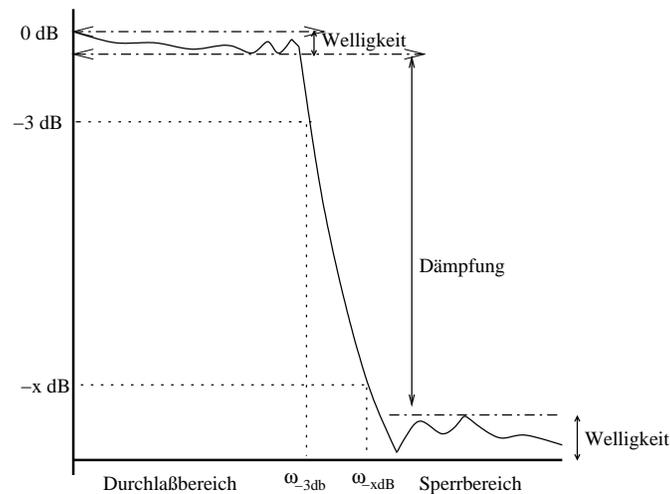
Die Funktion  $A \in L_2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  sei nicht negativ. Dann gibt es ein kausales LTI-System mit Impulsantwort  $h \in L_2(\mathbb{Z})$  und  $A(\nu) = |\hat{h}(\nu)|$  für  $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  genau dann, wenn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\log A(\nu)| d\nu < \infty.$$

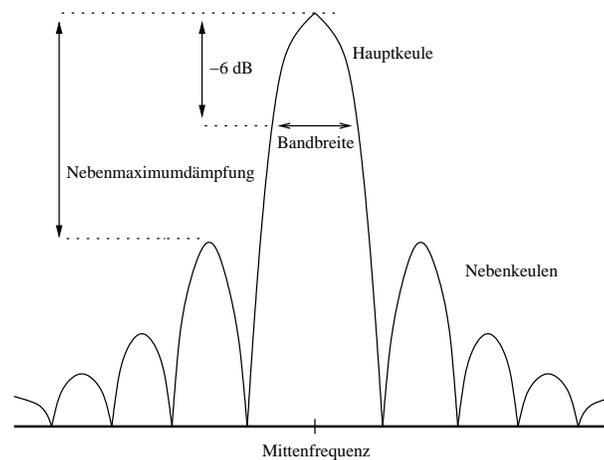
**Beweis:** siehe z.B. *Rudin: Real and Complex Analysis*, Satz 17.10 und Satz 17.17, oder *Papoulis: Signal Analysis*, S.227ff.

### 3.4 Spezifikation realer Bandfilter

Weil die Filtercharakteristik realer LTI-Systeme nur näherungsweise mit einer gewünschten idealen übereinstimmt, beschreibt man die Güte der Approximation üblicherweise durch Angabe einiger Größen, die wir an einem Tiefpaßfilter und einem Bandpaßfilter erläutern wollen. Man beschränkt sich dabei auf Filter mit reelwertiger Impulsantwort. Ihr Amplitudenfrequenzgang ist dann bereits durch die Werte auf den nichtnegativen Frequenzen bestimmt.



Spezifikation des Amplitudenfrequenzgangs von Tiefpaßfiltern



Spezifikation des Amplitudenfrequenzgangs von Bandpaßfiltern

Die absolute Größe von  $|\hat{h}(\nu)|$  ist für die Beurteilung der Filtereigenschaften nicht interessant; meist bezieht man alle Größen bei Tiefpaßfiltern auf  $|\hat{h}(0)|$  und bei Bandpaßfiltern auf das Maximum der Hauptkeule. Um zu vermeiden, daß man bei der Hintereinanderschaltung von Filtern ständig solche Quotienten multiplizieren muß, um die Charakteristik des gesamten System zu beschreiben, hat es sich eingebürgert, Größenverhältnisse in logarithmischer Skalierung anzugeben. Vorteil: Man muß nur addieren statt multiplizieren.

**Sprechweise:**

$A_1$  weicht von  $A_0$  um  $x$  dB ab (sprich dB als deziBel)

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_0} = 10^{\frac{x}{20}}$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \log_{10} \frac{A_1}{A_0}$$

Achtung! Bedeuten  $A_1$  und  $A_0$  physikalisch Leistungen, so verwendet man den Faktor 10 statt 20.

Bei der Beschreibung von Filtern trägt man meist  $\log |\hat{h}|$  auf und gibt die Dämpfung und die Welligkeiten in den verschiedenen Bereichen an. 3 dB Welligkeit bedeutet z.B., daß die Werte von  $|\hat{h}|$  sich höchstens um den Faktor  $10^{\frac{3}{20}} \approx \sqrt{2}$  unterscheiden.

Als obere Grenze für den Durchlaßbereich wird oft die Frequenz genommen, bei der  $|\hat{h}|$  um -3 dB (oder um -6 dB) gegenüber  $|\hat{h}(0)|$  sich verändert hat. Im Übergangsbereich wird die Steigung der Flanke oft in dB/Oktave angegeben. So entspricht -6 dB/Oktave einer Halbierung bei Frequenzverdoppelung.

# Kapitel 4

## Die diskrete Fouriertransformation

### 4.1 Die Fouriertransformation diskreter periodischer Funktionen

Für  $N \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{P}_N$  der Raum der Funktionen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , die mit der Periode  $N$  periodisch sind.

Sei  $A \subset \mathbb{Z}$  ein Intervall aus  $N$  Punkten. Dann ist jede Funktion  $f \in \mathcal{P}_N$  durch ihre Werte auf  $A$  eindeutig bestimmt, und

$$\mathcal{P}_N \rightarrow \mathbb{C}^A, \quad f \mapsto f|_A$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.  $\mathcal{P}_N$  ist also ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension  $N$ . Und weil  $\mathbb{C}^A$  mit dem üblichen Skalarprodukt

$$\langle x|y \rangle = \sum_{a \in A} \overline{x(a)} y(a)$$

eine Hilbertraum ist, kann man auch  $\mathcal{P}_N$  zu einem Hilbertraum machen.

Eine Basis von  $\mathcal{P}_N$  erhält man, indem man eine Basis von  $\mathbb{C}^A$  wählt und jeden Basisvektor, der ja eine Funktion  $A \rightarrow \mathbb{C}$  ist, periodisch auf  $\mathbb{Z}$  fortsetzt. Geht man von den kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{C}^A$  aus, so erhält man als Basisvektoren in  $\mathcal{P}_N$  die Impulskämme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{a+kN}$  mit  $a \in A$ . Interessant ist auch noch eine andere Basis, die folgendermaßen konstruiert wird.

Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $E_k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$E_k(j) = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i k j}{N}}.$$

Jede dieser Funktionen ist periodisch mit Periode  $N$ , und es ist  $E_k = E_m$  genau dann, wenn  $k - m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $N$  ist. Deshalb genügt es, die Indizes  $k$  aus einem Intervall  $B \subset \mathbb{Z}$  mit genau  $N$  Punkten zu wählen.

Man rechnet nach, daß für  $k \in B$  die Einschränkungen  $\eta_k = E_k|_A$  auf das Intervall  $A$  Einheitsvektoren in  $\mathbb{C}^A$  sind, die orthogonal aufeinander stehen. Die  $\eta_k$  mit  $k \in B$  sind also eine Orthonormalbasis in  $\mathbb{C}^A$ . Somit hat jedes  $x: A \rightarrow \mathbb{C}$  die Darstellung

$$x = \sum_{b \in B} \xi_b \eta_b$$

mit den Koeffizienten

$$\xi_b = \langle \eta_b | x \rangle = \sum_{a \in A} \overline{\eta_b(a)} x(a) = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} x(a) e^{-\frac{2\pi i b a}{N}}.$$

Entsprechend hat jede Funktion  $f \in \mathcal{P}_N$  die Darstellung

$$f = \sum_{b \in B} \hat{f}(b) E_b$$

mit den Koeffizienten  $\hat{f}(b) = \langle \eta_b | f|_A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) e^{-\frac{2\pi i b a}{N}}$ .

Jede mit  $N$  periodische Funktion läßt sich also als eine endliche Linearkombination der diskreten harmonischen Schwingungen  $E_k$  schreiben. Diese Darstellung entspricht der Umkehrformel der Fouriertransformation auf  $L_1(\mathbb{Z})$ . Deshalb bezeichnet man die Koeffizientenfolge  $\hat{f}(b)$  mit  $b \in B$  als die *Fouriertransformierte der periodischen Funktion*  $f$ .

Für Anwendungen wählt man das Intervall  $B$  möglichst symmetrisch zu Null und interpretiert die Indizes  $b \in B$  als positive und negative Frequenzen ganz so wie bei der Fouriertransformation auf  $L_1(\mathbb{Z})$ . In numerischen Algorithmen dagegen wählt man eher  $A = B = \{0, \dots, N-1\}$ , weil dieses Intervall der Indizierung von Arrays in  $\mathbb{C}$  entspricht. Dann erhält man die sogenannte diskrete Fouriertransformation.

## 4.2 Die Diskrete Fouriertransformation (DFT)

**4.2.1 Definition** Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $f: \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ist die *diskrete Fouriertransformierte* von  $f$  definiert als

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} \quad \text{für } j \in \{0, \dots, N-1\}$$

Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir  $\hat{f}$  statt  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} f$ . Die *Diskrete Fouriertransformation (DFT)* ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N}: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad f \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} f.$$

### 4.2.2 Eigenschaften der DFT

a) Die DFT ist ein Automorphismus des Vektorraums  $\mathbb{C}^N$ ; die *inverse DFT* hat die Gestalt

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N}^{-1} g(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{\frac{2\pi i j k}{N}}.$$

b) Für jedes  $f \in \mathbb{C}^N$  gilt die Umkehrformel

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}(j) e^{\frac{2\pi i j k}{N}},$$

wobei  $\hat{f} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} f$ . Dies bedeutet, daß die DFT einfach ein Koordinatenwechsel in  $\mathbb{C}^N$  ist, und zwar sind die Werte von  $\hat{f}$  einfach die Koeffizienten der Entwicklung von  $f$  nach der Basis  $\eta_k$  mit  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ .

**Beweis:** Nachrechnen.

## 4.3 Die zyklische Faltung

Jede Zahl in  $0, \dots, N-1$  repräsentiert genau eine Äquivalenzklasse in der additiven Gruppe  $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Daher kann man  $\{0, \dots, N-1\}$  mit  $\mathbb{Z}_n$  identifizieren und als additive Gruppe betrachten; die Gruppenoperation ist dann einfach die Addition modulo  $N$ . Auf der Menge der Funktionen  $\{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$  (also den Vektoren in  $\mathbb{C}^N$ ) kann man dann eine Faltungsoperation analog zu der Faltung auf  $L_1(\mathbb{Z})$  erklären.

**4.3.1 Definition** Die *zyklische Faltung* ist die Abbildung

$$\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad (f, g) \mapsto f \star g$$

mit

$$f \star g(j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k) g(k),$$

wobei die Addition der Indizes modulo  $N$  auszuführen ist.

### 4.3.2 Eigenschaften der Faltung

a) Die zyklische Faltung ist bilinear, kommutativ und assoziativ. Und es gilt

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Mit der zyklischen Faltung als Multiplikation wird  $\mathbb{C}^N$  eine Banachalgebra.

b) Für  $f, g \in \mathbb{C}^N$  gilt

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

und

$$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \star \hat{g}.$$

## 4.4 Vergleich der FT auf $L_1(\mathbb{Z})$ mit der DFT

Gegeben seien  $N \in \mathbb{N}$  und eine Abtastschrittweite  $T > 0$ .

Ist  $f \in L_1(\mathbb{Z})$ , so konvergiert für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  die Reihe

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(j - mN) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tau_{mN} f(j).$$

Die dadurch definierte Funktion  $\tilde{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Summe der um Vielfache von  $N$  verschobenen Exemplare von  $f$ ; deshalb ist sie periodisch mit Periode  $N$  und somit durch ihre Einschränkung  $g := \tilde{f}|_{\{0, \dots, N-1\}}$  eindeutig bestimmt. Die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} f$  von  $f$  und die diskrete Fouriertransformierte  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} g$  von  $g$  hängen folgendermaßen zusammen.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{NT}\right) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) e^{-\frac{2\pi i k j}{N}} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) e^{-\frac{2\pi i k (j \bmod N)}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(j + mN) \right) e^{-\frac{2\pi i k j}{N}} \\ &= \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N} g(k). \end{aligned}$$

Im allgemeinen kann man jeden Wert  $g(j)$  numerisch nur näherungsweise aus  $f$  berechnen, weil unendlich viele Summanden der Reihe  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \tau_{mN} f(j)$  von Null verschieden sind. Verschwindet jedoch  $f$  außerhalb eines beschränkten Intervalls, so überlappen sich an jeder Stelle nur die Träger endlich vieler  $\tau_{mN} f$ , so dass in der Reihe stets nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind.

Verschwindet  $f$  sogar außerhalb eines Intervalls  $I$  einer Länge  $< N$ , so überlappen sich die Träger der  $\tau_{mN} f$  überhaupt nicht mehr, und man erhält  $f$  aus  $\tilde{f}$  zurück, weil  $f = \tilde{f} \cdot \chi_I$  gilt. Ist  $I = \{0, \dots, N-1\}$ , so gilt  $g = f|_I$  und somit nach obiger Überlegung

$$\hat{f}\left(\frac{k}{NT}\right) = \widehat{f|_I}(k)$$

Die Werte der Fouriertransformierten von  $f$  an den Stellen  $\frac{k}{NT}$  lassen sich also mit der DFT aus den Werten von  $f$  in den Punkten  $0, \dots, N-1$  berechnen. In diesem Fall kann man dann sogar die Fouriertransformierte von  $f$  an jeder Stelle aus den Werten der diskreten Fouriertransformation von  $f|_{\{0, \dots, N-1\}}$  mit Hilfe einer Interpolationsformel berechnen.

**4.4.1 Satz** Verschwindet  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  außerhalb eines Intervalls  $\{0, \dots, N-1\}$ , so gilt für jedes  $\nu \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1 - e^{-2\pi i T \nu}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{f}\left(\frac{k}{NT}\right)}{1 - e^{-2\pi i T\left(\nu + \frac{k}{N}\right)}}$$

d.h.  $\hat{f}$  läßt sich aus den Werten der diskreten Fouriertransformierten von  $f|_{\{0, \dots, N-1\}}$  berechnen.

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i T \nu n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{g}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right) e^{-2\pi i T \nu n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{g}(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i k}{N} - 2\pi i T \nu} \right)^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}\left(\frac{k}{NT}\right) \frac{1 - e^{-2\pi i T \nu N}}{1 - e^{-2\pi i T\left(\nu + \frac{k}{N}\right)}} \end{aligned}$$

**Bemerkung** Verschwindet  $f$  außerhalb eines endlichen Intervalls, dessen linker Eckpunkt nicht die Null ist, so kann man durch eine Verschiebung die Situation des obigen Satzes herstellen. Dadurch ändert sich lediglich die Gestalt der Interpolationformel ein wenig.

## 4.5 Die schnelle Fouriertransformation (FFT)

Die Rechenzeit der DFT gemäß der Definition liegt in  $O(N^2)$ . Durch geschicktes Ausnützen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion kann man die Komplexität auf  $O(N \log N)$  drücken. Solche schnellen Algorithmen werden unter dem Stichwort FFT (Fast Fourier Transform) zusammengefaßt. Sie beruhen auf einem *Divide-et-Impera*-Ansatz. Wir beschreiben im Folgenden den Decimation-in-Time-Algorithmus, der meist Cooley und Tukey (circa 1965) zugeschrieben wird.; tatsächlich wurden schon in den 40er Jahren FFT-Algorithmen entwickelt.

Im Folgenden sei  $N = 2^n$ , mit  $n \in \mathbb{N}$ .

$f(0), \dots, f(N-1)$  sei das zu transformierende Signal.  $\hat{f}$  sei die diskrete Fouriertransformierte von  $f$ .

Sei  $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ . Dann gilt

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

### 4.5.1 Lemma (Danielson, Lanczos 1942)

Für  $j \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$  seien die gerade und die ungerade Hälfte von  $f$  definiert als

$$f_0(j) = f(2j) \quad \text{und} \quad f_1(j) = f(2j+1)$$

$\hat{f}_0$  und  $\hat{f}_1$  seien die diskreten Fouriertransformierten von  $f_0$  und  $f_1$ . Dann gilt für jedes  $k \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_0(k) + W_N^k \hat{f}_1(k).$$

**Beweis:**

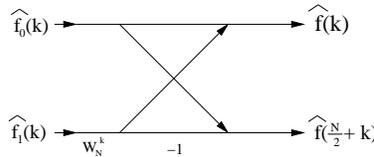
$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} f(j) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} f(2j) + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} f(2j+1) \\ &= \hat{f}_0(k) + W_N^k \hat{f}_1(k) \end{aligned}$$

**4.5.2 Korollar** Für  $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$  gilt

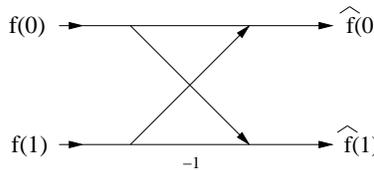
$$\hat{f}(k) = \hat{f}_0(k) + W_N^k \hat{f}_1(k) \quad \text{und} \quad \hat{f}\left(\frac{N}{2} + k\right) = \hat{f}_0(k) - W_N^k \hat{f}_1(k).$$

**Beweis:**  $\hat{f}_0$  und  $\hat{f}_1$  sind periodisch mit Periode  $\frac{N}{2}$ . Daher gilt  $\hat{f}_0\left(\frac{N}{2} + k\right) = \hat{f}_0(k)$  und  $\hat{f}_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = \hat{f}_1(k)$ . Mit  $W_N^{\frac{N}{2} + k} = -W_N^k$  folgt die Behauptung.

Das Korollar gibt eine rekursive Vorschrift an, wie die  $N$ -Punkte-DFT  $\hat{f}$  aus den  $\frac{N}{2}$ -Punkte-DFT  $\hat{f}_0$  und  $\hat{f}_1$  berechnet werden kann. Die Werte  $\hat{f}_0(k)$  und  $\hat{f}_1(k)$  werden nur zur Berechnung von  $\hat{f}(k)$  und  $\hat{f}\left(\frac{N}{2} + k\right)$  benötigt. Die Gleichungen des Korollars stellt man oft als Berechnungsgraph dar. Wegen seiner Gestalt heißt dieser Graph oft Butterfly oder Schmetterling.



Für  $N = 2$  gilt  $f_0(0) = f(0)$  und  $f_1(0) = f(1)$ ,  $\hat{f}_0(0) = f(0)$ ,  $\hat{f}_1(0) = f(1)$  und  $W_2^0 = 1$ . Deshalb vereinfacht sich das Diagramm zu folgendem.



Es gilt also  $\hat{f}(0) = f(0) + f(1)$  und  $\hat{f}(1) = f(0) - f(1)$ .

### 4.5.3 Das Prinzip der FFT

Wende das Lemma von Danielson und Lanczos wiederholt auf die gerade und die ungerade Hälfte an. Bei jedem Schritt halbiert sich die Länge der Signale, bis man schließlich nach dem  $n$ -ten Schritt bei der Länge 1 ankommt, wo die DFT die Identität ist. Dann hat man die Signale  $\widehat{f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}}$  mit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ . Jedes dieser Signale stimmt mit einem Wert  $f(j)$  überein; aber mit welchem? Dazu folgende Überlegung:

$\widehat{f_{\alpha_1}}$  ist die DFT von  $f_{\alpha_1}$ . Für  $\alpha_1 = 0$  besteht  $f_{\alpha_1}$  nur aus den Signalwerten mit den geraden Indizes  $2 \cdot j$ , für  $\alpha_1 = 1$  aus den Werten mit den ungeraden Indizes  $2 \cdot j + 1$ , also in jedem Fall aus den Werten mit den Indizes  $2 \cdot j + \alpha_1$ . Daraus werden im nächsten Schritt wiederum nur die Werte mit geradem bzw ungeradem Index gewählt; bezüglich der ursprünglichen Indizierung von  $f$  sind dies die Werte mit den Indizes  $2 \cdot (2 \cdot j + \alpha_2) + \alpha_1 = 2^2 \cdot j + 2 \alpha_2 + \alpha_1$ . Durch Induktion folgt für  $j \in \{0, \dots, \frac{N}{2^m} - 1\}$

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(j) &= f(2 \dots 2(2(2j + \alpha_m) + \alpha_{m-1}) + \dots) + \alpha_1) \\ &= f(2^m j + 2^{m-1} \alpha_m + \dots \alpha_1) \end{aligned}$$

Für  $m = n = \log_2 N$ , also  $\frac{N}{2^m} = 1$ , ist nur  $j = 0$  möglich, und es gilt

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(0) = f\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \alpha_{k+1}\right)$$

**Fazit:**  $\widehat{f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}}$  hat nur eine Komponente und die ist gerade

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(0) = f\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \alpha_{k+1}\right).$$

**Beachte:** Die Zahl  $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \alpha_{k+1}$  hat die Dualdarstellung  $\alpha_n \dots \alpha_1$ , also gerade die 0-1-Folge, die aus  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  durch Umkehrung der Bitreihenfolge entsteht. Sie ist also einfach zu berechnen.

#### 4.5.4 FFT-Algorithmus

Setze für jedes  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(0) = f\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} 2^k\right).$$

Berechne dann rekursiv

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(k) &= F_{\alpha_1 \dots \alpha_m 0}(k) + W_{\frac{N}{2^{m-1}}}^k F_{\alpha_1 \dots \alpha_m 1}(k) \quad \text{für } k \in \{0, \dots, \frac{N}{2^m} - 2\} \\ F_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(\frac{N}{2^m} + k) &= F_{\alpha_1 \dots \alpha_m 0}(k) - W_{\frac{N}{2^{m-1}}}^k F_{\alpha_1 \dots \alpha_m 1}(k) \quad \text{für } k \in \{0, \dots, \frac{N}{2^m} - 2\} \end{aligned}$$

und für  $k \in \{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$

$$F(k) = F_0(k) + W_N^k F_1(k) \quad \text{und} \quad F(\frac{N}{2} + k) = F_0(k) - W_N^k F_1(k)$$

Dann ist  $F$  die diskrete Fouriertransformierte von  $f$ .

#### 4.5.5 Bemerkungen zur Implementierung

**1.** Zur Ausführung des  $m$ -ten Schrittes werden nur die Ergebnisse des  $(m-1)$ -ten Schrittes benötigt. Man kann deshalb dieselben Speicherplätze benutzen. Insgesamt braucht man also nur ein  $2N$ -dimensionales Array für den Real- und Imaginärteil der Daten.

**2.** Speichert man das Signal  $f$  in dem Datenarray nach aufsteigendem Index ab, so erhält man zum Schluß  $\hat{f}$  nicht nach aufsteigenden Indizes geordnet, sondern nach den in der Bitreihenfolge umgekehrten Indizes geordnet. Man muß deshalb noch eine Umordnung (Bitumkehrung oder Bit Reversal) anschließen. Stattdessen kann man natürlich auch anfangs die Signalwerte entsprechend umordnen.

**3.** Die Koeffizienten  $W_{N 2^{-(m-1)}}^k$  wird man nur einmal zu Anfang berechnen und abspeichern. Wegen

$$\begin{aligned} W_{N 2^{-(m-1)}}^k &= e^{\frac{2\pi i k}{N} \cdot 2^{m-1}} \\ &= (W_N^k)^{2^{m-1}} \\ &= ((W_N^k)^2)^{2^{m-2}} \end{aligned}$$

kann man zunächst die  $W_N^k$  ausrechnen und dann iterativ bei jedem Schritt die  $(W_N^k)^{2^{m-1}}$ .

**4.** Weil sich die inverse DFT von der DFT nur durch das Vorzeichen im Exponenten des Exponentialfaktors und durch den Normierungsfaktor  $\frac{1}{N}$  unterscheidet, kann man mit dem FFT-Algorithmus auch die inverse DFT berechnen. Man muß nur  $W_N$  durch  $\overline{W_N}$  ersetzen.

**5.** Auf die Bitumkehrung kann man verzichten, wenn man die FFT nur benutzt, um die zyklische Faltung zweier Signale als Multiplikation ihrer Fouriertransformierten im Frequenzbereich zu realisieren, weil dann durch die Rücktransformation die Bitumkehrung automatisch erfolgt.

#### 4.5.6 Abschätzung des Rechenaufwandes

$T_m(N)$  und  $T_a(N)$  seien die Anzahl der komplexen Multiplikationen bzw. der komplexen Additionen, die für eine  $N$ -Punkte-FFT benötigt werden (ohne die Berechnung der  $W_N^k$ ).

Aufgrund der verwendeten Divide-et-Impera-Strategie gelten die folgenden Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} T_m(N) &= 2 T_m\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2} \\ T_a(N) &= 2 T_a\left(\frac{N}{2}\right) + N \end{aligned}$$

Aus der Theorie der Rekursionsgleichungen (oder direkt mit vollständiger Induktion) folgt

$$T_m \in O(N \log N) \quad \text{und} \quad T_a \in O(N \log N)$$

Demgegenüber ist der Aufwand zur direkten Berechnung der DFT gemäß der Definition quadratisch! Für größere  $N$  ergibt sich durch die FFT eine enorme Rechenzeitverkürzung.

Trotzdem sollte man darauf achten, ob man wirklich alle Werte der DFT benötigt. Wenn man nur einige braucht, ist es meist günstiger, sie direkt gemäß der Definition zu berechnen und nicht via FFT!

#### 4.5.7 Andere FFT-Algorithmen

Statt den Zeitbereich rekursiv zu zerlegen kann man auch den Frequenzbereich zerlegen (decimation in frequency).

FFT-Algorithmen für Dateilängen, die keine Zweierpotenz sind, gibt es zwar, aber sie sind umständlicher und lohnen sich kaum. Meist ist es einfacher, die Daten künstlich auf die nächste Zweierpotenz zu verlängern, z.B. durch periodische Fortsetzung oder durch Nullen (padding).

Zur schnellen Berechnung der Faltung über anderen Körpern gibt es FFT-ähnliche, zahlentheoretische Algorithmen.

Siehe *R. E. Blahut: Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley 1985.

## 4.6 Berechnung der Faltung mit Hilfe der DFT

Die zyklische Faltung zweier Funktionen  $f, g: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$  benötigt einen asymptotischen Rechenaufwand in  $\Theta(N^2)$ , wenn man sie gemäß der Definition berechnet. Schneller geht es, wenn man die Faltung mit Hilfe der DFT auf die Multiplikation der Fouriertransformierten zurückführt. Es gilt

$$f \star g(j) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g})$$

Führt man die DFT mit einem FFT-Algorithmus aus, liegt der Rechenaufwand in  $O(N \log N)$ . Die Rücktransformation braucht denselben Aufwand. Und die punktweise Multiplikation der Fouriertransformierten lässt sich mit  $O(N)$  Operationen berechnen. Insgesamt ergibt dies einen Aufwand in  $O(N \log N)$ , also deutlich weniger als die direkte Berechnung der Faltungssummen.

Um diese Überlegungen auch für die Berechnung der Faltung zweier Funktionen  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  nutzen zu können, müssen wir untersuchen, wann und wie die Faltung durch die zyklische Faltung ausgedrückt werden kann.

Die Faltung zweier Funktionen  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kann numerisch höchstens dann exakt berechnet werden, wenn

- die Summe  $f \star g(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(j-k)$  für jedes  $j$  endlich ist
- die Werte  $f \star g(j)$  nur für endlich viele  $j$  berechnet werden müssen.

Die Bedingung a) ist erfüllt, wenn  $f$  oder  $g$  endlichen Träger haben. Die Bedingung b) ist erfüllt, wenn  $f$  und  $g$  endlichen Träger haben oder wenn zumindest eine der beiden Funktionen periodisch ist.

### 4.6.1 Die Faltung eines periodischen Signals $f$ mit einem Signal $g$ mit endlichem Träger

Wähle ein Intervall  $A$ , dessen Länge  $N$  eine Periode von  $f$  ist und das den Träger von  $g$  enthält. Durch eine gemeinsame Verschiebung von  $f$  und  $g$  kann man erreichen, dass der linke Eckpunkt von  $A$  gleich 0 ist, also  $A$  die Gestalt  $\{0, \dots, N-1\}$  hat.  $f \star g$  ist mit derselben Periode wie  $f$  periodisch; es ist durch seine Werte auf  $A$  eindeutig bestimmt. Und für jedes  $j \in A$  gilt

$$\begin{aligned} f \star g &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(j-k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(j-k)g(k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k) \\ &= (f|_A) \star_{\text{zyklisch}} (g|_A) \end{aligned}$$

**4.6.2 Die Faltung zweier Signale mit endlichem Träger**

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  habe den endlichen Träger  $S_1$  und  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  den endlichen Träger  $S_2$ . Wähle ein  $M \in \mathbb{N}$  mit  $S_2 \subset \{-M, \dots, M\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \star g(j) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(j - k)g(k) \\ &= \sum_{k=-M}^M f(j - k)g(k) \end{aligned}$$

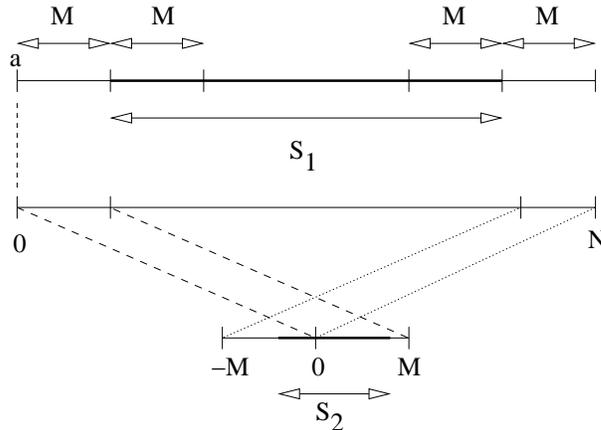
Für  $j < \min S_1 - M$  und  $j > \max S_1 + M$  gilt daher  $f \star g(j) = 0$ . Setze  $N = 2M + 1 + \max S_1 - \min S_1$ ,  $a = \min S_1 - M$ . Und für jedes  $j \in \{0, \dots, N - 1\}$  sei  $\tilde{f}(j) = f(j + a)$  und

$$\tilde{g}(j) = \begin{cases} g(j) & \text{für } 0 \leq j \leq M \\ g(j - N) & \text{für } N - M \leq j \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$f \star g(k) = \tilde{f} \star_{\text{zyklisch}} \tilde{g}(k - a) \text{ für } \min S_1 - M \leq k \leq \max S_1 + M.$$

Bemerkung: Das obige  $N$  ist nicht möglichst klein gewählt.



**4.6.3 Faltung eines Signals beliebiger Dauer mit einem Signal mit endlichem Träger**

Will man das Ausgangssignal eines FIR-Filters mit Impulsantwort  $h$  in aufeinanderfolgenden Zeitpunkten für ein beliebiges Eingangssignal  $f$  berechnen, so zerlegt man  $f$  in kürzere Blöcke, die dann ähnlich wie oben verarbeitet werden. Dabei gibt es zwei Ansätze. Es sei wieder  $M \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $h$  außerhalb von  $\{-M, \dots, M\}$  verschwindet.

**4.6.3.1 Overlap-Save-Methode** Fasst man einen Block  $f(k), \dots, f(k + N - 1)$  der Länge  $N \geq 2M + 1$  als Funktion auf  $\mathbb{Z}_N$  auf und berechnet die zyklische Faltung mit  $h$ , so stimmen nur die Ergebnisse für  $k + M < j < k + N - M$  mit denen der Faltung  $h \star_{\mathbb{Z}} f$  überein. Die anderen können abweichen, weil modulo  $N$  gerechnet wird. Den nächsten Datenblock muss man daher überlappend zum vorhergehenden wählen, und zwar  $f(k + N - 1 - 2M), \dots$ , so dass die noch fehlenden Faltungsergebnisse für  $k + N - M \leq j < k + N$  berechnet werden können. Den allerersten Datenblock ergänzt man durch genügend viele führende Nullen.

**4.6.3.2 Overlap-Add-Methode** Man zerteilt das Eingangssignal  $f$  in disjunkte Blöcke der Länge  $N > 2M + 1$ . An jeden Block werden links und rechts je  $M$  Nullen angefügt. Dann berechnet man die zyklische Faltung mit  $h$ . Das Ergebnis stimmt nur für die mittleren  $N - 2M$  Indizes mit den entsprechenden Werten von  $h \star_{\mathbb{Z}} f$  überein, Die  $M$  linken bzw. die  $M$  rechten Werte sind durch die zyklische Faltung jedoch nicht gestört, weil wir genügend viele Nullen hinzugefügt haben; ihnen fehlt lediglich ein Anteil, der gerade gleich den  $M$  rechten bzw.  $M$  linken Werten des Faltungsergebnisses des vorhergehenden bzw. nachfolgenden Blocks ist. Diesmal überlappen sich also die Ergebnisblöcke und müssen einfach punktweise aufaddiert werden.

# Kapitel 5

## Der Entwurf von digitalen Filtern

### 5.1 Die Fenstermethode

**Idee** Gegeben seien der gewünschte Amplituden- und Phasenfrequenzgang

$$A: \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \rightarrow [0, \infty[ \quad \text{und} \quad \Phi: \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \rightarrow [-\pi, \pi[$$

Die gewünschte Übertragungsfunktion  $H(\nu) := A(\nu) e^{i\Phi(\nu)}$  sei integrierbar. Dann verwende  $h = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{-1}(H)$  als Impulsantwort.

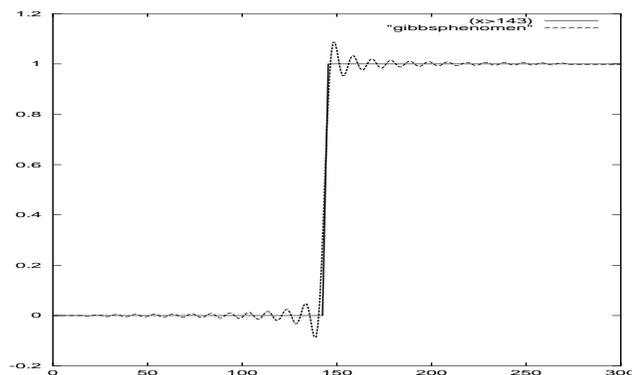
**Problem**  $h$  hat i.a. keinen endlichen Träger und ist nicht kausal.

**Idee** Schneide  $h$  ab d.h. setze  $h_N = w_N \cdot h$  mit  $w_N = \chi_{[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]}$  für ein  $N \in \mathbb{N}$  und verwende  $h_N$  als Impulsantwort. Dann ist

$$\widehat{h}_N(\nu) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h(k) e^{-2\pi i k \nu}$$

eine Partialsumme der Fourierreihe von  $H$ .

**Problem** Aus der Theorie der Fourierreihen weiß man, daß die Fourierreihe von  $H$  auf jedem kompakten Intervall, auf dem  $H$  stetig differenzierbar ist, gleichmäßig gegen  $H$  konvergiert. In der Nähe von Sprungstellen ist die Konvergenz jedoch nicht gleichmäßig, sondern es tritt das sogenannte Gibbsche Phänomen auf: Die Partialsummen haben sogenannte Überschwinger d.h. sie weichen um circa 9 Prozent der Sprunghöhe von  $H$  ab, egal wie groß  $N$  auch ist.



#### 5.1.1 Fensterfunktionen

Wähle als Abschneidefunktion  $w_N$  nicht eine Rechteckfunktion, sondern eine, welche langsamer und glatter auf Null abfällt. Solche Funktionen werden *Fensterfunktionen* genannt. Man meint damit Funktionen  $w: \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty[$ , welche nur in einem endlichen Intervall ungleich Null sind und dort eine mehr oder weniger glockenförmige Gestalt haben. Diese kann durchaus eckig sein, z.B. die Form eines Rechtecks, Trapezes oder Dreiecks haben; sie kann aber auch sehr glatt sein wie die Gaußglocke.

In der Literatur sind viele solcher Fensterfunktionen untersucht worden; sie tragen meist die Namen von denjenigen, die sie eingeführt haben: Hamming, Hanning, Blackman, Bartlett, Kaiser, Tukey, Lanczos, Tschebyscheff u.a.

Durch die Verwendung solcher 'weicher' Fensterfunktionen kann das Überschwingen der Übertragungsfunktion bei Sprüngen reduziert oder sogar eliminiert werden, allerdings wird dann bei Bandfiltern auch der Übergangsbereich zwischen Durchlaß- und Sperrbereich verbreitert.

### 5.1.2 Kausalität

Hat man durch Abschneiden der idealen Impulsantwort mit einer Fensterfunktion eine endliche Impulsantwort erhalten, so kann man sie durch eine Zeitverschiebung auch noch kausal machen. Man beachte, daß eine Zeitverschiebung den Amplitudenfrequenzgang nicht verändert, lediglich der Phasenfrequenzgang wird beeinflusst. Wie?

## 5.2 Frequenzabtastung

**Idee** Man gibt sich Werte  $y_0, \dots, y_M \in \mathbb{C}$  der gewünschten Übertragungsfunktion an endlich vielen Stellen  $\nu_0, \dots, \nu_M$  vor und löst das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^M x_k e^{-2\pi i T \nu_j k} = y_j \quad j = 0, \dots, M.$$

Setzt man  $h(k) = x_k$  für  $0 \leq k \leq M$  und  $h(k) = 0$  sonst, so ist  $h$  die Impulsantwort eines kausalen FIR-Filters, dessen Übertragungsfunktion  $\hat{h}$  die vorgegebenen Werte  $y_j$  interpoliert.

Die Lösung des Gleichungssystem läßt sich leicht berechnen; denn es drückt einfach aus, daß  $y$  die diskrete Fouriertransformierte von  $x$  ist, also erhält man  $x$  aus  $y$  vermöge der inversen DFT.

**Probleme** Man hat zunächst keine Kontrolle über das Verhalten von  $\hat{h}$  zwischen den Stützstellen.  $\hat{h}$  ist dort zwar stetig, kann aber hin- und herschwanken.

### 5.2.1 Verbesserungen

1. Um die Welligkeit in den Durchlaß- oder Sperrbereichen zu verringern, kann man die Anzahl  $M$  der Stützstellen etwas größer wählen, aber nicht für alle Stützstellen Werte vorgeben, z.B. nicht für die Übergangsbereichen. Dann ist das entstehende Gleichungssystem unterbestimmt. Diese nicht vorgegebenen Stützwerte dienen als Variablen, die so gewählt werden, daß die Welligkeiten in den Durchlaß- und/oder Sperrbereichen minimiert werden. Dazu verwendet man numerische Optimierungsmethoden.

2. Mit Methoden aus der Tschebyscheffapproximationstheorie kann man Polynome eines gegebenen Grades  $M$  finden, welche die gewünschte Übertragungsfunktion auf einer gegebenen kompakten Teilmenge des Frequenzbereichs möglichst gut bezüglich der Supremumsnorm (oder Tschebyscheffnorm) approximieren (Remez exchange algorithm, siehe MathLab). Damit lassen sich exzellente Bandfilter konstruieren.

## 5.3 Linearer Phasengang

Bisher haben wir meist nur den Amplitudenfrequenzgang eines Systems betrachtet und den Phasenfrequenzgang unberücksichtigt gelassen. Welche Auswirkungen hat der Phasenfrequenzgang?

Für eine harmonische Schwingung  $\exp_{\omega}$  der Frequenz  $\omega$  bedeutet eine Phasenverschiebung  $\varphi \in [-\pi, \pi[$  eine Zeitverschiebung um  $\frac{\varphi}{\omega}$ , denn

$$e^{2\pi i \omega t + i\varphi} = e^{2\pi i \omega (t + \frac{\varphi}{\omega})}.$$

Ein LTI-System mit Phasenfrequenzgang  $\Phi(\nu) = \arg \hat{h}(\nu)$  verschiebt also eine harmonische Schwingung der Frequenz  $\omega$  um  $\frac{\Phi(\omega)}{\omega}$ . Bei einem Signal  $f$  mit Fourierzerlegung  $f(t) = T \int \hat{f}(\nu) e^{2\pi i T \nu t} dt$  werden die einzelnen Schwingungsanteile somit um möglicherweise unterschiedliche, frequenzabhängige Zeitspannen verschoben. Überlegen wir uns, was dies im Falle eines idealen Tiefpaßfilters  $Q$  bedeutet. Ein Eingangssignal  $f$ , dessen Fouriertransformierte nur Anteile im Durchlaßbereich enthält, sollte das Filter unverändert passieren, eventuell mit einer Zeitverzögerung. Es sollte also  $Qf = f$  oder  $Qf = \tau_a f$  mit  $a \geq 0$  gelten. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn  $Q$  alle Frequenzanteile um dieselbe Zeitspanne  $a$  verzögert, wenn also  $\frac{\Phi(\nu)}{\nu} = -a$  für alle

$\nu$  im Durchlaßbereich gilt d.h. wenn  $Q$  linearen Phasengang  $\Phi(\nu) = -a\nu$  hat. In allen anderen Fällen kann es passieren, daß  $Q$  die Form von  $f$  verändert, obwohl  $f$  nur Frequenzanteile im Durchlaßbereich hat. Das ist meist in höchstem Maße unerwünscht, z.B. für Audiosignale oder phasenmodulierte Signale.

Es ist eine Kunst, analoge Filter oder rekursive diskrete Filter zu entwerfen, deren Phasengang auch nur einigermaßen linear ist. Diskrete FIR-Filtern dagegen lassen sich sehr leicht so entwerfen, daß ihr Phasengang exakt linear ist. Und zwar läßt sich der lineare Phasengang einfach durch geeignete Symmetrie der Impulsantwort erzwingen.

**5.3.1 Satz**  $Q$  sei ein lineares FIR-Filter. Seine Impulsantwort  $h$  sei reellwertig und verschwinde außerhalb von  $\{0, \dots, M\}$ .

a) Gilt  $h(k) = h(M - k)$  für alle  $k \in \{0, \dots, M\}$ , so gibt es eine Funktion

$$C: \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß  $\hat{h}(\nu) = C(\nu) e^{-\pi i M T \nu}$  für alle  $\nu$ . Das Filter  $Q$  hat dann also den linearen Phasengang

$$\Phi(\nu) = \begin{cases} -\pi M T \nu \pmod{2\pi} & , \text{ falls } C(\nu) > 0 \\ -\pi M T \nu + \pi \pmod{2\pi} & , \text{ falls } C(\nu) < 0 \end{cases}$$

b) Gilt  $h(k) = -h(M - k)$  für alle  $k \in \{0, \dots, M\}$ , so gibt es eine Funktion

$$C: \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß  $\hat{h}(\nu) = C(\nu) e^{-\pi i M T \nu + i \frac{\pi}{2}}$  für alle  $\nu$ . Das Filter  $Q$  hat dann also den linearen Phasengang

$$\Phi(\nu) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \pi M T \nu \pmod{2\pi} & , \text{ falls } C(\nu) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \pi M T \nu \pmod{2\pi} & , \text{ falls } C(\nu) < 0 \end{cases}$$

**Beweis:**

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \sum_{k=0}^M h(k) e^{-2\pi i \nu T k} \\ &= \begin{cases} h\left(\frac{M}{2}\right) e^{-2\pi i \nu T \frac{M}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) (e^{-2\pi i \nu T k} + e^{-2\pi i \nu T (M-k)}), & \text{ falls } M \text{ gerade} \\ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) (e^{-2\pi i \nu T k} + e^{-2\pi i \nu T (M-k)}), & \text{ falls } M \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-2\pi i \nu T \frac{M}{2}} (h\left(\frac{M}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) (e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)} + e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)})) \\ e^{-2\pi i \nu T \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) (e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)} + e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)}) \end{cases} \\ &= e^{-2\pi i \nu T \frac{M}{2}} C(\nu), \end{aligned}$$

wobei

$$C(\nu) = \begin{cases} h\left(\frac{M}{2}\right) + 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \cos\left(\frac{M}{2} - k\right) \nu T & \text{ falls } M \text{ gerade} \\ 2 \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) \cos\left(\frac{M}{2} - k\right) \nu T & \text{ falls } M \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\nu) &= \sum_{k=0}^M h(k) e^{-2\pi i \nu T k} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) (e^{-2\pi i \nu T k} - e^{-2\pi i \nu T (M-k)}), & \text{falls } M \text{ ungerade} \\ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) (e^{-2\pi i \nu T k} - e^{-2\pi i \nu T (M-k)}), & \text{falls } M \text{ gerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-2\pi i T \nu \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) (e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)} - e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)}) \\ e^{-2\pi i T \nu \frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) (e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)} + e^{-2\pi i \nu T (\frac{M}{2}-k)}) \end{cases} \\
&= e^{-2\pi i T \nu \frac{M}{2}} e^{i \frac{\pi}{2}} C(\nu),
\end{aligned}$$

wobei

$$C(\nu) = \begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \sin(\frac{M}{2} - k) \nu T & \text{falls } M \text{ gerade} \\ 2 \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h(k) \sin(\frac{M}{2} - k) \nu T & \text{falls } M \text{ ungerade} \end{cases}$$

**5.3.2 Folgerung** Ein Filter, das einer der obigen Symmetriebedingungen genügt, hat in jedem Intervall, das keine Nullstelle der Übertragungsfunktion enthält, linearen Phasengang. Damit kann man FIR-Bandfilter konstruieren, die im Durchlassbereich exakt linearen Phasengang haben.

## 5.4 Einfache experimentelle Beispiele

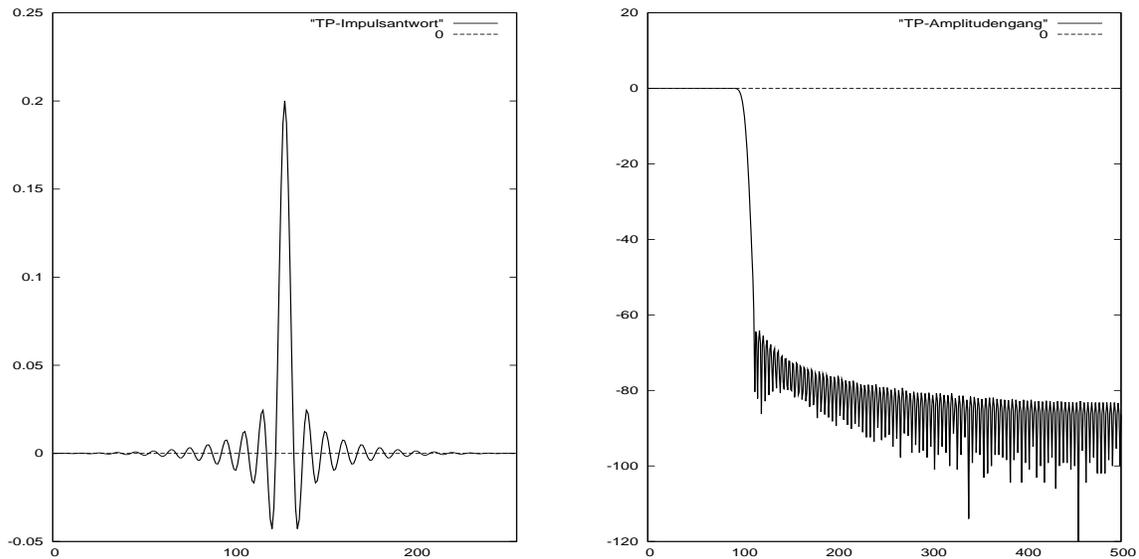
**5.4.1 Tiefpass** Durch Rücktransformation einer idealen Tiefpassübertragungsfunktion mit Grenzfrequenz  $\beta$  und anschließender Fensterung soll die Impulsantwort  $h$  eines FIR-Tiefpassfilters realisiert werden. Seien  $T$  die Abtastschrittweite und  $\alpha = \frac{1}{T}$  die Abtastfrequenz. Somit ist  $[-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha]$  der Frequenzbereich. Die Übertragungsfunktion  $H_\beta$  des idealen Tiefpassfilters mit Grenzfrequenz  $\beta < \frac{1}{2}\alpha$  ist  $G = \chi_{[-\beta, \beta]}$ . Wendet man auf  $H_\beta$  die inverse Fouriertransformation an, so erhält man

$$\check{H}_\beta(k) = \frac{\sin 2\pi\beta T k}{\pi k}$$

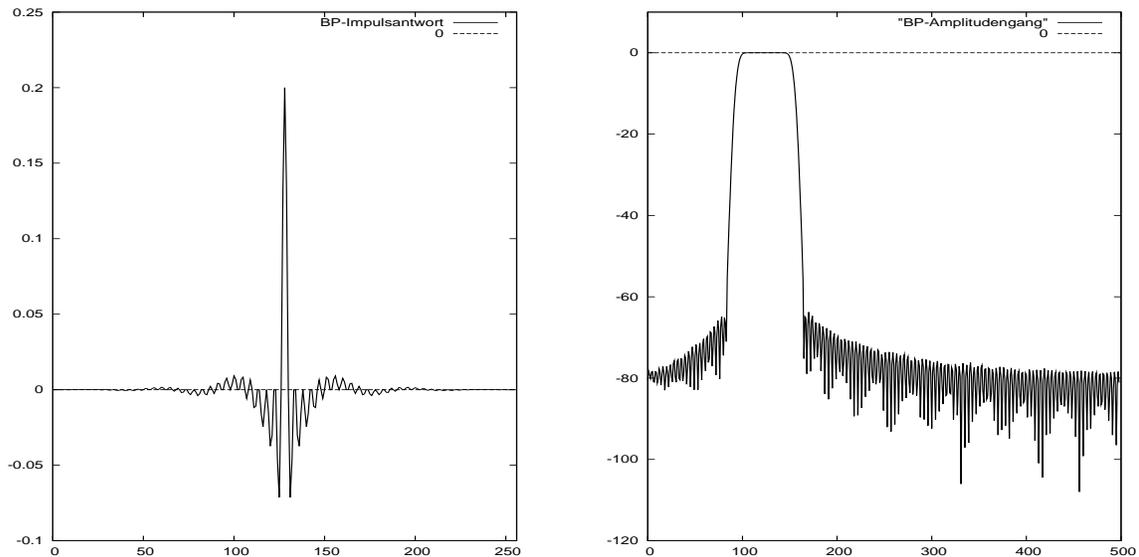
Als Fensterfunktion wählen wir eine Gaußfunktion  $g_\sigma$ . Ihre Breite  $\sigma$  sei so groß, dass mehrere Schwingungsperioden von  $\check{H}_\beta$  noch nennenswerte Amplituden haben. Multipliziert man nun  $g_\sigma \cdot \check{H}_\beta$  mit der Indikatorfunktion  $\chi_{[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]}$  eines Intervalls, so erhält man die Funktion  $h = g_\sigma \cdot \check{H}_\beta \cdot \chi_{[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]}$  mit endlichem Träger der Länge  $N + 1$ . Dabei wird  $N$  so groß gewählt, dass  $g_\sigma \cdot \check{H}_\beta$  außerhalb des Intervalls  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  nur sehr kleine Werte hat.

Diese Funktion  $h$  wird als Impulsantwort eines FIRfilters verwendet. Bei geeigneter Wahl von  $\sigma$  und  $N$  hat es eine recht gute Tiefpasscharakteristik mit steiler Filterflanke, wenig Welligkeit im Durchlassbereich und guter Dämpfung im Sperrbereich. In der Praxis wird man das Filter kausal machen, indem man die Impulsantwort um  $\frac{N}{2}$  verschiebt, so dass der Träger dann das Intervall  $\{0, \dots, N\}$  ist.

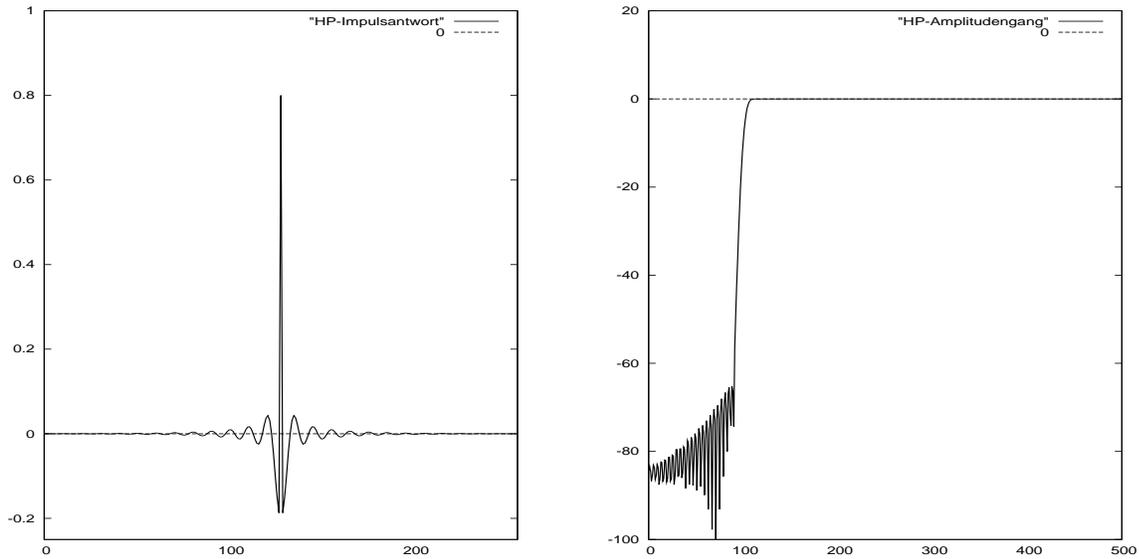
Die folgenden Diagramme zeigen die Impulsantwort und den Amplitudenfrequenzgang für die Parameter  $\beta = 0.1\frac{\alpha}{2}$ ,  $N = 256$  und  $\sigma = 48$ . Es ist nur der Verlauf auf der positiven Frequenzachse gezeichnet, die mit 100-normierter Frequenz beschriftet ist..



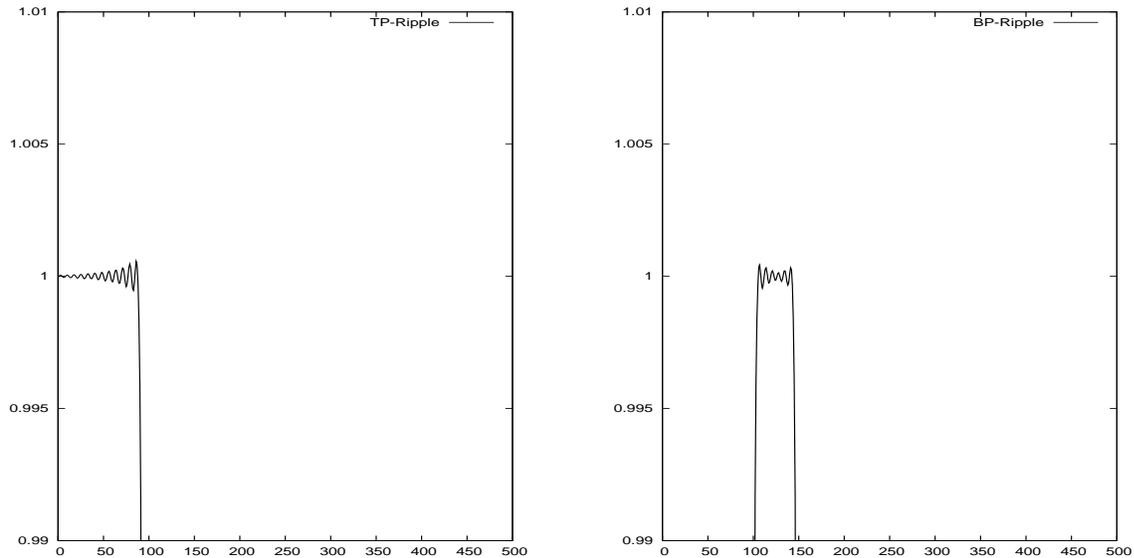
**5.4.2 Bandpass** Die Übertragungsfunktion eines idealen Bandpassfilters kann man aus der eines idealen Tiefpassfilters konstruieren, indem man die Übertragungsfunktion des Bandpassfilters um die gewünschte Mittenfrequenz  $\omega$  einmal nach links und einmal nach rechts verschiebt und die beiden so erhaltenen Funktionen addiert. Man beachte, dass eine Verschiebung um  $\omega$  im Frequenzbereich der Multiplikation mit der komplexen harmonischen Schwingung  $\exp_{\omega,T}$  im Zeitbereich entspricht. Der Addition zweier Translate, die um  $-\omega$  bzw.  $\omega$  verschoben sind, entspricht also im Zeitbereich der Multiplikation mit  $\exp_{\omega,T} + \exp_{-\omega,T} = 2 \cos 2\pi\omega T k$ . Man kann also die inverse Fouriertransformierte leicht ausrechnen und dann wie oben beschrieben durch Fensterung und Abschneiden die Impulsantwort eines FIR-Filters konstruieren. Wenn man von dem idealen Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz  $0.03 \cdot \frac{\alpha}{2}$  ausgeht, erhält man das folgende Bandpassfilter.



**5.4.3 Hochpass** Wählt man bei obiger Konstruktion eines Bandpassfilters als Mittenfrequenz  $\omega = \frac{\alpha}{2}$ , so erhält man die Übertragungsfunktion eines idealen Hochpassfilters. Im Zeitbereich entspricht dies der Multiplikation der Impulsantwort des Tiefpassfilters mit  $\cos \pi k = (-1)^k$ . Jeder zweite Wert der Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters wird also einfach negativ genommen. Daraus kann man wie oben beschrieben durch Fensterung und Abschneiden die Impulsantwort eines FIR-Filters konstruieren. Wenn man von dem Tiefpassfilter in obigem Diagramm ausgeht, erhält man das folgende Hochpassfilter.



**Bemerkung** Mit den obigen einfachen Konstruktionen haben wir keine Abschätzungen für die Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich sowie die Steilheit der Filterflanken bekommen. Dass die Amplitudenfrequenzgänge trotzdem ganz brauchbar sind, liegt unter anderem daran, dass wir ziemlich lange Impulsantworten gewählt haben. In Echtzeitanwendungen könnte der Rechenaufwand dafür zu hoch sein; immerhin muss man in jedem Zeitpunkt 256 Multiplikationen ausführen und deren Ergebnisse addieren. Die folgenden beiden Diagramme zeigen stark vergrößert in linearer Skalierung die Welligkeit im Durchlassbereich des Tiefpasses und des Bandpasses.



# Kapitel 6

## Korrelationstechniken

### 6.1 Die Kreuzkorrelation

Als Maß für die Verschiedenheit zweier Signale bietet es sich, die Größe ihrer Differenz zu wählen. Wie die Größe gemessen wird, hängt von der Anwendung ab. In manchen Fällen ist es sinnvoll, das Supremum der Absolutwerte zu nehmen, in anderen bevorzugt man die Energie d.h. die  $L^2$ -Norm.

Seien  $f$  und  $g$  Signale mit endlicher Energie, also  $f, g \in L_2(\mathbb{Z})$ . Als Maß für ihre Verschiedenheit kann man die Energie ihrer Differenz wählen

$$\Delta = \|f - g\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k) - g(k)|^2$$

In Anwendungen kommt es häufig vor, daß zwei Signale bis auf eine unbekannte Verschiebung einander sehr ähnlich sind, z.B. wenn man zweimal dasselbe Wort hintereinander spricht. Dann betrachtet man die Energie der Differenzen von  $f$  und allen möglichen Translaten von  $g$ , also

$$\Delta(t) = \|f - \tau_t g\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k) - g(k-t)|^2$$

für jedes  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k) - g(k-t)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(k) - g(k-t)) \overline{(f(k) - g(k-t))} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|f(k)|^2 + |g(k-t)|^2 - f(k) \overline{g(k-t)} - \overline{f(k)} g(k-t)) \\ &= \|f\|_2^2 + \|\tau_t g\|_2^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2 \operatorname{Re} f(k) \overline{g(k-t)} \\ &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} f \star \overline{g}^-(t) \end{aligned}$$

$\Delta$  wird also genau dort minimal, wo  $\operatorname{Re} f \star \overline{g}^-$  maximal wird. Und wenn  $f$  und  $g$  reell sind, so fallen die Minima von  $\Delta$  genau mit den Maxima von  $f \star \overline{g}^-$  zusammen.

Deshalb wird die Funktion

$$r_{fg}(t) = f \star \overline{g}^-(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \overline{g(k-t)}$$

die *Kreuzkorrelationsfunktion* von  $f$  und  $g$  genannt.

Für  $f = g$  spricht man von der *Autokorrelationsfunktion* von  $f$ .

**Anschauliche Deutung:** Ist  $f$  reell, so stimmt  $f$  mit einem Translat  $\tau_t f$  besonders gut überein, wenn  $t$  ein Minimum der Autokorrelationsfunktion  $r_{ff}$  ist. An der Autokorrelationsfunktion von  $f$  kann man also näherungsweise Periodizitäten von  $f$  ablesen.

Um von der absoluten Größe der Signale unabhängig zu werden, verwendet man für Signale  $f, g \in L_2(\mathbb{Z})$  oft den *Korrelationskoeffizienten*

$$\text{corr}_{fg} = \frac{r_{fg}}{\|f\|_2 \|g\|_2},$$

dessen Betrag wegen der Cauch-Schwarzschen Ungleichung  $\leq 1$  ist.

### 6.1.1 Einige Eigenschaften der Korrelationsfunktion

- a)  $r_{gf}(t) = \overline{r_{fg}(-t)}$
- b)  $|r_{fg}(t)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
- c)  $\widehat{r_{fg}} = \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{g}}$
- d)  $\widehat{r_{ff}} = |\widehat{f}|^2$
- e)  $\|r_{fg}\|_1 = \langle \widehat{f} | \overline{\widehat{g}} \rangle = \langle f | g \rangle$
- f)  $\|r_{ff}\|_1 = \|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 = r_{ff}(0)$

## 6.2 Die zyklische Kreuzkorrelation

Für  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man die zyklische Kreuzkorrelation, indem man in der Definition der Kreuzkorrelation auf  $\mathbb{Z}$  einfach die Faltung durch die zyklische Faltung ersetzt, also

$$r_{fg}(t) = f \star_{\text{zyklisch}} \overline{g}(-t)$$

Für  $f = g$  spricht man dann von der zyklischen Autokorrelation.

Die Überlegungen zum Verhältnis der Faltung und der zyklischen Faltung lassen sich fast wörtlich übertragen, insbesondere wenn die Kreuzkorrelation durch die zyklische Kreuzkorrelation ausgedrückt werden kann.

## 6.3 Korrelationsfilter, Matched Filter

Gegeben sei ein Signal  $g \in L_2(\mathbb{Z})$ ,  $g \neq 0$ .

$Q$  sei das Filter mit Impulsantwort  $h = \overline{g}$ . Dann gilt für jedes  $f \in L_2(\mathbb{Z})$  und jedes  $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |Qf(t)| &= |h \star f(t)| \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g(k-t)} f(k) \right| \\ &\leq \|h\|_2 \|f\|_2 \text{ nach Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gibt, so dass  $f = \lambda \tau_t g$  ist.

Der Quotient  $\frac{|Qf(t)|}{\|f\|_2}$  erreicht also nur für die Eingangssignale  $f = \lambda \tau_t g$  seinen maximalen Wert  $\|g\|_2$ . Deshalb wird  $Q$  das dem Signal  $g$  *angepasste Filter oder Matched Filter* genannt. Wegen  $Qf = r_{fg}$  spricht man auch von *Korrelationsfilter*. Beschränkt man die Eingangssignale auf Signale der Form  $f = \lambda \tau_t g$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$  und  $a \in \mathbb{Z}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{|Qf(t)|}{\|f\|_2} &= \frac{1}{\|g\|_2} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g(k-t)} g(k-a) \right| \\ &= \frac{1}{\|g\|_2} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g(k-(t-a))} g(k) \right| \\ &= r_{gg}(t-a) \end{aligned}$$

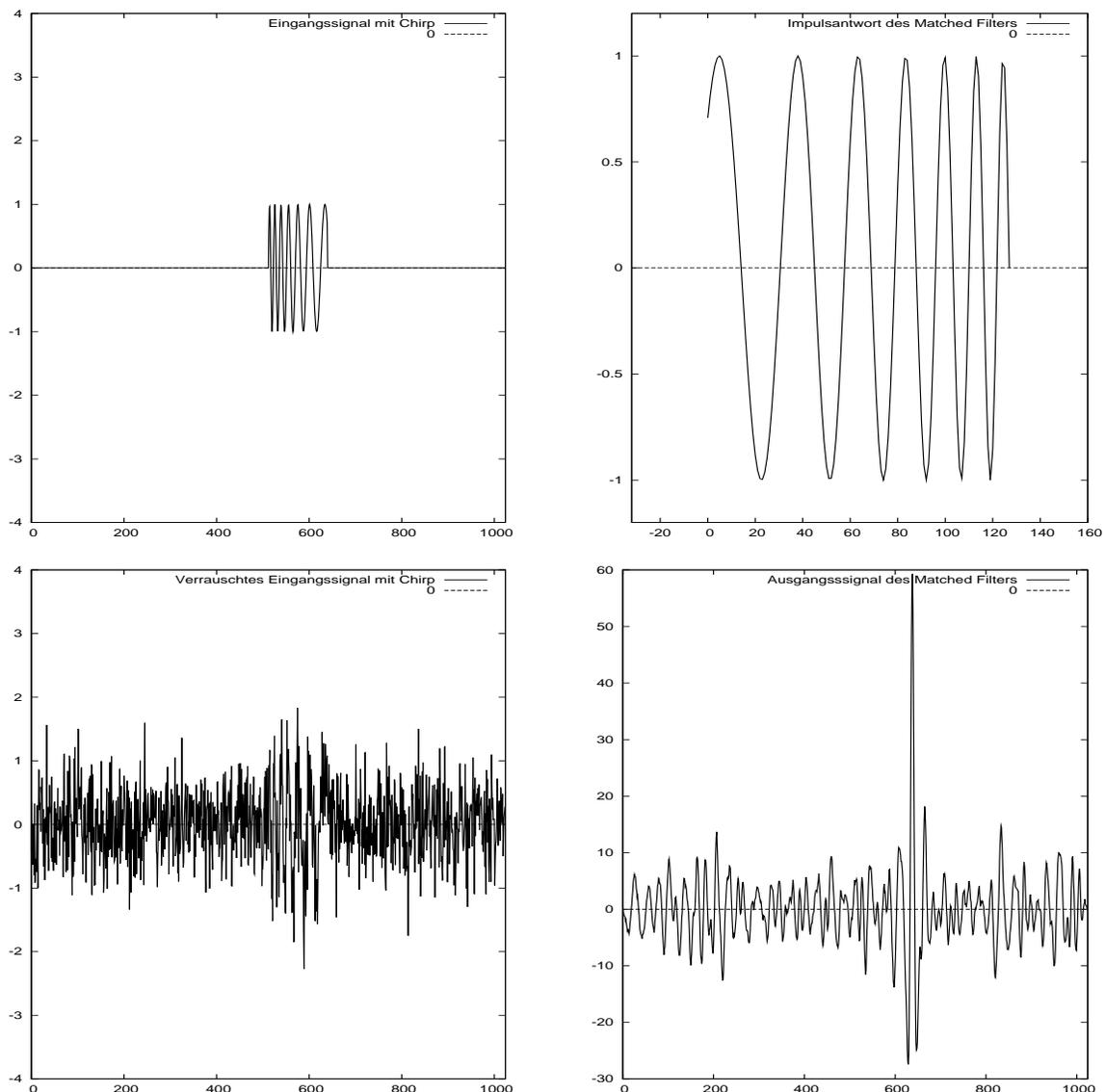
Diese Ausdruck ist unabhängig von  $\lambda$  und wird auf alle Fälle für  $t = a$  maximal.

In Anwendungen wählt man  $g$  oft so, dass die Autokorrelationsfunktion  $r_{gg}$  in 0 das einzige Maximum hat, und dass dieses Maximum auch deutlich größer als alle Nebenmaxima ist. Man sendet dann dieses Signal  $g$  aus und empfängt ein eventuell abgeschwächtes Echo  $\lambda\tau_a g$ . Dieses Empfangssignal schickt man durch das Matched Filter  $Q$  und bestimmt den Zeitpunkt, in dem der Filterausgang maximalen Betrag hat, denn dieser Zeitpunkt ist nach obiger Überlegung genau gleich der Zeitverschiebung  $a$ .

In der Praxis taucht das Problem auf, dass  $Q$  nicht kausal ist, wenn  $g$  kausal ist. Deshalb wählt man für  $g$  Signale mit endlichem, relativ kurzem Träger, so dass man  $Q$  bis auf eine Zeitverzögerung von der Größe der Trägerlänge realisieren kann.

Derartige Techniken werden z.B. bei der Radarortung eingesetzt. Dort sind die empfangenen Echos oft sehr schwach und werden durch das Rauschen der Antenne und der Empfangsverstärker gestört. Mathematisch modelliert man solche Störungen durch stochastische Prozesse. Man kann dann zeigen, dass Matched Filter solche Störungen sehr effizient unterdrücken.

Die folgenden Diagramme zeigen ein Chirpsignal, die Impulsantwort des zugehörigen Matched Filters, dasselbe Eingangssignal mit starkem Gaußchen Rauschen und das Ausgangssignal des Matched Filters.



## 6.4 Laufzeitbestimmung und Anwendungen

Das Global Positioning System (GPS) besteht aus mehreren Satelliten, die Signale aussenden, welche mit einem Empfänger empfangen und ausgewertet werden können, um den eigenen Standort zu bestimmen.

Jeder Satellit hat eine sehr exakte Uhr an Bord und sendet ein periodisches Signal aus, das starr mit seiner Uhr synchronisiert ist. Der Empfänger hat ebenfalls eine exakte Uhr und erzeugt dasselbe Signal wie der Satellit. Dieses Referenzsignal vergleicht er mit dem empfangenen Satellitensignal. Durch Maximierung der Kreuzkorrelation stellt er fest, welche Zeit das Satellitensignal braucht, bis es bei ihm ankommt. Weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit bekannt ist, kann aus der Laufzeit die Entfernung des Empfängers zum Satelliten berechnet werden.

Wenn man auf diese Weise die Entfernung zu drei verschiedenen Satelliten misst, hat man seinen Standort relativ zur Position der Satelliten bestimmt. Die Position der Satelliten relativ zur Erde wird ständig von Bodenstationen sehr genau vermessen und mit den Satellitensignalen übertragen, so dass man daraus dann letztendlich seinen eigenen Standort berechnen kann.

Falls der Empfänger vier Satelliten empfängt, braucht er selbst keine exakte Uhr zu besitzen, sondern kann die fehlende Zeitinformation zusätzlich zu den Laufzeiten aus den empfangenen Signalen berechnen.

Die Satellitensignale sind Signale, deren Autokorrelationsfunktion nur an der Stelle 0 ein deutliches Maximum aufweist. Es sind binäre Signale (0-1-Folgen), die mit rückgekoppelten Schieberegistern erzeugt werden. Sind  $T$  die Periodendauer und  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit, so ist die Entfernungsbestimmung nur im Bereich  $[0, vT[$  eindeutig.

Ähnlich kann man vorgehen, um die Entfernung eines Flugzeugs zu bestimmen. Dazu sendet man selbst ein Funksignal aus und empfängt den vom Flugzeug reflektierten Anteil. Aus dem Maximum der Kreuzkorrelation der beiden Signale erhält man die Laufzeit  $\tau$  und die Entfernung  $\frac{vT}{2}$ , wenn  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals ist.

In Wasser oder festen Medien wird man statt Funkwellen besser Schallwellen verwenden. Dabei muss man die Schallwellen nicht unbedingt selbst erzeugen. Hat z.B. eine Rohrleitung ein Leck, so wird durch das ausströmende Medium oft ein Schallsignal erzeugt, das man mit zwei Sensoren vor und hinter dem Leck empfängt. Mit Hilfe der Kreuzkorrelation der beiden Sensorsignale kann man den Laufzeitunterschied des Schalls zu den beiden Sensoren und damit die relative Lage des Lecks zu den beiden Sensoren bestimmen.

Geschwindigkeiten von Fahr- oder Flugzeugen lassen sich auf fast dieselbe Weise bestimmen. Dazu bringt man zwei Sensoren bezüglich der Bewegungsrichtung hintereinander an, die den vorbeihuschenden, festen Hintergrund optisch (oder irgendwie anders) beobachten. Die beiden Sensorsignale sind idelaerwise bis auf eine zeitliche Verschiebung identisch. Aus ihrer Kreuzkorrelation kann man diesen Zeitunterschied  $\tau$  bestimmen und mit Hilfe ihres Abstandes  $a$  erhält man die Geschwindigkeit  $\frac{a}{\tau}$ .

## 6.5 Die Korrelation periodischer Signale

Sind  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  periodische Signale mit der Periode  $P$ , so definiert man als *Kreuzkorrelation* von  $f$  und  $g$  die Funktion  $r_{fg}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$r_{fg}(t) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} f(k) \overline{g(k-t)}.$$

Für  $f = g$  nennt man sie die *Autokorrelationsfunktion*.

$r_{fg}$  und  $r_{ff}$  sind ebenfalls periodisch mit Periode  $P$ . Die Funktion ändern sich nicht, wenn man  $P$  durch  $nP$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ersetzt oder wenn der Summationsindex über ein anderes Periodenintervall läuft.

### 6.5.1 Detektion von gestörten periodischen Signalen

#### 6.5.1.1 Bekannte Periode

Um eine Folge binärer Daten zu übermitteln, wrde eine 1 durch die (zeitlich begrenzte) Aussendung eines periodischen Signals  $g$  kodiert und eine 0 durch die Aussendung keines Signals. Bei der Übertragung werden

zufällige Störungen  $s$  addiert, so dass der Empfänger  $f = \lambda g + s$  mit  $\lambda > 0$  oder  $\lambda = 0$  empfängt. Der Dekodierer muss herausfinden, welche der beiden Fälle vorliegt.

Es gilt

$$r_{fg} = \lambda r_{gg} + r_{sg}$$

Vielfach ist die Störung  $s$  rein zufällig und fast nicht mit  $g$  korreliert, also  $r_{sg}$  dem Betrag nach klein, während  $r_{gg}$  deutliche Maxima in den ganzzahligen Vielfachen von  $P$  hat, die man im Falle  $\lambda > 0$  auch noch in  $r_{fg}$  erkennt.

Diesen Effekt kann man oft noch verstärken, indem man bei der Berechnung von  $r_{fg}$  die Summe über ein Vielfaches  $nP$  der Periodenlänge erstreckt; dadurch ändert sich  $r_{gg}$  nicht,  $r_{sg}$  wird jedoch oft noch kleiner, weil sich die in  $s$  enthaltenen zufälligen Oszillationen noch besser wegmitteln. Für eine präzise Begründung muss man die Situation geeignet stochastisch modellieren.

In Anwendungen wird der Empfänger das gesendete Signal  $g$  oft mit einer Zeitverzögerung  $x$  empfangen; er wird also statt  $\lambda g + s$  das Signal  $f = \lambda r_{xg} + s$  aufnehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} r_{fg}(t) &= \lambda r_{g r_{xg}}(t) + r_{sg}(t) \\ &= \lambda r_{gg}(t+x) + r_{sg}(t) \end{aligned}$$

Dann liegen die Maxima von  $r_{fg}$  in den Punkten  $x+nP$ . Kennt man  $x$  nicht, so kostet die Suche nach deutlichen Maxima natürlich Zeit, Für zeitkritische Anwendungen kann man das Verfahren manchmal vereinfachen, indem man statt der Kreuzkorrelation  $r_{fg}$  die Autokorrelation  $r_{ff}$  berechnet, von der man a priori weiß, dass sie im Falle  $\lambda > 0$  Maxima in  $0, P, 2P, \dots$  hat. es gilt

$$r_{ff} = \lambda^2 r_{gg} + \lambda r_{sg} + \lambda r_{gs} + r_{ss}.$$

Aufgrund der Zufälligkeit der Störung erwartet man, dass die letzten drei Summanden recht klein sind, so dass im Falle  $\lambda > 0$  die Maxima von  $r_{gg}$  auch in  $r_{ff}$  deutlich zu sehen sind, und zwar in  $0, P, 2P, \dots$ . Allerdings hat man jetzt drei Störterme, so dass die Maxima weniger deutlich als bei der Kreuzkorrelation sein werden.

### 6.5.1.2 Unbekannte Periode

Ein Signal  $f = g + s$  bestehe aus einem periodischen Signal  $g$  und einer additiven Störung  $s$ . Die Periode  $P$  von  $g$  sei nicht bekannt, sondern soll bestimmt werden.

In praktischen Anwendungen kann man  $f$  nur während einer endlichen Zeitspann  $\{0, \dots, N-1\}$  messen. Man geht davon aus, dass man eine grobe obere Schranke für  $P$  kennt und dass  $N$  sehr viel größer als  $P$  ist. Das gemessene Signal  $f|_{\{0, \dots, N-1\}}$  setzt man durch Null zu einem Signal  $\tilde{f}$  auf  $\mathbb{Z}$  fort, und analog entsehe  $\tilde{g}$  aus  $g|_{\{0, \dots, N-1\}}$  und  $\tilde{s}$  aus  $s|_{\{0, \dots, N-1\}}$  durch Fortsetzung mit Null.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) \overline{\tilde{f}(k-t)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}(k) \overline{\tilde{g}(k-t)} \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}(k) \overline{\tilde{s}(k-t)} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}(k) \overline{\tilde{g}(k-t)} \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}(k) \overline{\tilde{s}(k-t)} \end{aligned}$$

Für kleine  $t$  stimmt der erste Term recht gut mit  $r_{gg}(t)$  überein und wird somit in  $0, P, 2P, \dots$  relativ deutliche Maxima haben. je größer  $t$  wird, desto stärker wird die Abweichung, weil in der Summe durch das Abschneiden von  $g$  viele Summanden Null sind. Geht man davon aus, dass die Störung  $s$  zufällig ist und mit  $g$  nicht korreliert ist, so werden die restlichen drei Terme klein sein, so dass die Maxima des ersten Terms auch noch als deutliche Maxima von  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) \overline{\tilde{f}(k-t)}$  zumindest für kleine  $t$  erkennbar sein werden.



# Kapitel 7

## Die Systemfunktion von LTI-Systemen

### 7.1 Die z-Transformation diskreter Signale

Mit  $z = e^{2\pi iT\nu}$  erhält die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi iT\nu k}$$

eines Signals  $f \in L_1(\mathbb{Z})$  die Gestalt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) z^{-k}.$$

Dieser Ausdruck ist eine Laurentreihe, die zumindest auf der Einheitskreislinie konvergiert. Achtet man nicht auf Konvergenz, so kann man jedem beliebigen Signal  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  die formale Laurentreihe

$$\mathcal{Z}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) z^{-k}$$

zuordnen.  $\mathcal{Z}(f)$  nennt man die *z-Transformierte* von  $f$ .

Eine formale Laurentreihe ist nur eine andere Schreibweise für die Koeffizientenfolge  $(f(k))_k$ ; sie braucht nirgends zu konvergieren und stellt somit nicht unbedingt eine Funktion dar. In der Funktionentheorie schreibt man Laurentreihen meist in der Form  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$ ; in der Signalverarbeitung dagegen nummeriert man die Koeffizienten meist mit den Indizes entgegengesetzten Vorzeichens.

Die Menge der formalen Laurentreihen ist ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , und die sogenannte *z-Transformation*  $\mathcal{Z}$  ist ein Vektorraumisomorphismus von  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  in diesen Raum. Die Multiplikation zweier formaler Laurentreihen  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) z^{-k}$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) z^{-k}$  ist als das Cauchy-Produkt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) b(n-k) z^{-n}$$

definiert, sofern die Faltungssumme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) b(n-k)$  für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  konvergiert. Somit gilt trivialerweise, dass das Produkt  $\mathcal{Z}(f) \cdot \mathcal{Z}(g)$  genau dann existiert, wenn die Faltung  $f \star g$  existiert.

**7.1.1 Lemma** Es gilt

$$\mathcal{Z}(\tau_m f)(z) = z^{-m} \mathcal{Z}(f) \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}(f_-)(z) = \mathcal{Z}(f)\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) z^k.$$

Weil das Rechnen mit formalen Laurentreihen also nichts anderes als das Rechnen mit den Koeffizientenfolgen ist, hat man durch die z-Transformation bisher keinen Vorteil. Dies ändert sich, wenn man Signale betrachtet, deren z-Transformierte konvergente Laurentreihen sind.

Als Konvergenzgebiet einer Laurentreihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)z^{-k}$  bezeichnet man den offenen Kern der Menge aller  $z \in \mathbb{C}$ , in denen sie konvergiert. Aus der Funktionentheorie weiß man, dass das Konvergenzgebiet  $\Omega$  einer Laurentreihe ein Kreisring  $A(r_i, r_a) = \{z \in \mathbb{C} : r_i < |z| < r_a\}$  mit Mittelpunkt 0 ist. Dabei sind auch  $r_i < 0$  und  $r_a = \infty$  möglich;  $\Omega$  kann also eine Kreisscheibe  $D(0, r_a)$  mit Mittelpunkt 0 oder das Äußere einer solchen Kreisscheibe oder ganz  $\mathbb{C}$  oder leer sein. Wir wollen künftig unter einer konvergenten Laurentreihe eine solche verstehen, deren Konvergenzgebiet nicht leer ist.

Es gilt

$$r_a = \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(-k)|} \right)^{-1} = \text{Konvergenzradius der Potenzreihe } \sum_{k=1}^{\infty} f(-k)z^k$$

$$r_i = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(-k)|} = \left( \text{Konvergenzradius der Potenzreihe } \sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^k \right)^{-1}$$

Das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzgebietes kann sehr kompliziert und vielfältig sein (nirgends konvergent, überall konvergent, nur in einigen Punkten konvergent). Wir erinnern an folgende Aussage aus der Funktionentheorie.

### 7.1.2 Lemma

Sei  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$  eine konvergente Laurentreihe mit Konvergenzgebiet  $A(r_i, r_a)$ . Dann ist die Funktion  $B = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$  für  $z \in A(r_i, r_a)$  holomorph, und es gilt

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} B(z) z^{-n-1} dz \text{ für } n \in \mathbb{Z},$$

wobei  $\Gamma$  irgendeine Kreislinie um 0 in  $A(r_i, r_a)$  ist. Die Laurentreihe ist also durch die Funktion  $B$  eindeutig bestimmt.

Deshalb können wir die konvergenten Laurentreihen mit ihrem Grenzwert auf ihrem Konvergenzbereich identifizieren.  $\mathcal{Z}(f)$  bezeichne von nun an auch die durch  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)z^{-k}$  definierte holomorphe Funktion auf dem Konvergenzbereich der Reihe. Häufig werden wir auch die übliche Schreibweise benutzen und die  $z$ -Transformierte mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnen, also  $F$  statt  $\mathcal{Z}(f)$ .

**Vorsicht!** Die Angabe des Definitionsbereichs der  $z$ -Transformierten ist wesentlich! Dieselbe holomorphe Funktion kann je nach Kreisring völlig unterschiedliche Laurententwicklung haben.

### 7.1.3 Beispiel

Die Funktion  $F(z) = \frac{z}{z-1}$  ist holomorph in der offenen Einheitskreisscheibe  $D(0, 1)$  und ebenso in ihrem Äußeren. Und sie hat in  $z = 1$  einen Pol.

Für  $z \in D(0, 1)$  gilt

$$F(z) = \frac{z}{z-1} = -z \frac{1}{1-z} = - \sum_{k=1}^{\infty} z^k.$$

$F$  ist also die  $z$ -Transformierte von  $f$  mit  $f(k) = -1$  für  $k < 0$  und  $f(k) = 0$  sonst.

Für  $z \in A(1, \infty)$  gilt

$$F(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

$F$  ist also die  $z$ -Transformierte von  $f = \text{step}_0$ .

**7.1.4 Lemma**  $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  seien Signale mit den  $z$ -Transformierten  $F$  bzw.  $G$ , die auf den Kreisringen  $\Omega_F$  bzw.  $\Omega_G$  holomorph seien.

a) Ist  $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$ , so gilt für alle  $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{Z}(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha F(z) + \beta G(z).$$

b)  $\Omega_f \cap \Omega_G \neq \emptyset$ , so existiert  $f \star g$  und es gilt für alle  $z \in \Omega_f \cap \Omega_G$

$$\mathcal{Z}(f \star g)(z) = F(z) \cdot G(z).$$

c) Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $z \in \Omega_F$ ,  $z \neq 0$  gilt  $\mathcal{Z}(\tau_k f)(z) = z^{-k} F(z)$ .

d) Die z-Transformierte  $G$  von  $g = f_-$  ist holomorph in allen  $z$  mit  $\frac{1}{z} \in \Omega_F$  und erfüllt  $G(z) = F(\frac{1}{z})$ .

e) Ist  $g(j) = j f(j)$ , so gilt  $G(z) = -z \frac{dF}{dz}(z)$  für  $z \in \Omega_F$

f) Sind  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , und  $g(j) = a^j f(j)$ , so gilt  $G(z) = F(\frac{z}{a})$  für  $\frac{z}{a} \in \Omega_F$ .

**7.1.5 Lemma** Ist  $\Omega_F \neq \emptyset$ , so ist  $f$  genau dann kausal, wenn  $\Omega_F = A(r, \infty)$  für ein  $r \geq 0$  und wenn  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$  existiert.

### 7.1.6 Beispiele

f	F	$\Omega_F$
$\delta_0$	1	$\mathbb{C}$
step <sub>0</sub>	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
-step <sub>0</sub> (-k-1)	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z  < 1$
$a^k \text{step}_0(k)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z  > a$
$-a^k \text{step}_0(-k-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z  < a$
$a^k \text{step}_0(k-1)$	$\frac{1}{z-a}$	$ z  > a$
$-a^{k-1} \text{step}_0(-k)$	$\frac{1}{z-a}$	$ z  < a$
$ka^{k-1} \text{step}_0(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z  > a$
$-ka^{-k-1} \text{step}_0(-k-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z  < a$
$\binom{k}{l-1} a^{k-l-1} \text{step}_0(k)$	$\frac{z}{(z-a)^l}$	$ z  > a$
$-\binom{k}{l-1} a^{k-l-1} \text{step}_0(-k-1)$	$\frac{z}{(z-a)^l}$	$ z  < a$
$\binom{k-1}{l-1} a^{k-l} \text{step}_0(k-1)$	$\frac{1}{(z-a)^l}$	$ z  > a$
$-\binom{k-1}{l-1} a^{k-l} \text{step}_0(-k)$	$\frac{1}{(z-a)^l}$	$ z  < a$

## 7.2 Signale mit rationaler z-Transformierter

### 7.2.1 Polynome als z-Transformierte

$f$  sei ein Signal, dessen z-Transformierte  $F$  ein Polynom  $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$  ist. Wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen ist diese Darstellung von  $F$  eindeutig und somit  $f(k) = a_{-k}$  für  $-N \leq k \leq 0$  und 0 sonst. Falls  $N > 0$ , ist  $f$  nicht kausal.

### 7.2.2 Rationale Funktionen als z-Transformierte

Gegeben sei eine rationale Funktion  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , wobei  $P$  und  $Q$  teilerfremde Polynome mit  $\text{grad } P < \text{grad } Q$  seien.  $R$  lässt sich in einem Partialbruch entwickeln mit Summanden der Gestalt  $\frac{A}{(z-p)^l}$ , wobei  $p$  die Polstellen von  $R$  (das sind die Nullstellen von  $Q$  durchläuft und  $1 \leq l \leq$  Vielfachheit von  $p$ . Nach obiger Liste ist  $\frac{1}{(z-p)^l}$  die z-Transformierte von  $\binom{k-1}{l-1} p^{k-l} \text{step}_0(k-1)$ , falls der Definitionsbereich aus den  $z$  mit  $|z| < |p|$  besteht.

Gibt man sich als Definitionsbereich einen Kreisring  $K$  vor, dessen beide Randkomponenten jeweils mindestens einen Pol enthalten, so dass aber  $K$  selbst keinen Pol enthält, so kann man durch Rücktransformation der Summanden der Partialbruchentwicklung das Signal  $f$  berechnen, dessen z-Transformierte gleich  $R$  mit dem angegebenen Definitionsbereich ist.

**Achtung!** Oft erhält man eine rationale Funktion in der Gestalt

$$R(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \text{ mit } M < N.$$

Man kann sie umformen in

$$R(z) = z^{-M+N} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}.$$

Wegen  $M < N$  hat  $R$  stets eine Nullstelle im Nullpunkt.

Es ist üblich, nicht  $R$ , sondern  $\frac{R(z)}{z}$  in einen Partialbruch zu entwickeln mit Summanden der Gestalt  $\frac{A}{(z-p)^l}$ , wobei  $p$  die Polstellen von  $R$  durchläuft und  $1 \leq l \leq$  Vielfachheit von  $p$ . Die Funktion  $R$  selbst ist dann eine Summe von Ausdrücken der Gestalt  $A \frac{z}{(z-p)^l}$ , die mit obiger Liste zurücktransformiert werden können. Diese Entwicklungen nach Ausdrücken der Gestalt  $\frac{z}{(z-p)^l} = \frac{z^{-l+1}}{(1-pz^{-1})^l}$  wird oft (fälschlicherweise) als Partialbruchentwicklung von  $R$  bezeichnet.

### 7.2.3 Satz

$f$  sei ein kausales Signal, seine z-Transformierte  $F$  sei rational und habe genau einen Pol  $p$ . Seine Ordnung sei  $l > 0$ . Dann ist  $F$  für  $|z| > |p|$  definiert, und es gibt  $a_j \in \mathbb{C}$ , so dass für  $|z| > |p|$

$$F(z) = \frac{1}{(z-p)^l} \sum_{j=0}^l a_j z^j$$

gilt und  $f$  die Gestalt

$$f(k) = \sum_{j=0}^l \binom{k-1+j}{l-1} p^{k-l+j} a_j \text{step}_0(k-1+j).$$

Für  $|p| < 1$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$ , für  $|p| > 1$  wächst  $f$  exponentiell und für  $|p| = 1$  wächst  $f(k)$  wie  $k^{l-1}$ , d.h. für  $l = 1$ , dass  $|f|$  beschränkt ist.

**Beweis:**  $F$  lässt sich schreiben in der Form

$$F(z) = F_1(z) + \frac{P(z)}{(z-p)^l}$$

wobei  $F_1$  und  $P$  Polynome sind und  $\text{grad } P < l$ . Nach 7.1.5 konvergiert  $F(z)$  für  $z \rightarrow \infty$ . Weil  $\frac{P(z)}{(z-p)^l}$  gegen 0 strebt, muss  $F_1(z)$  beschränkt bleiben, was nur möglich ist, wenn der Grad von  $F_1$  gleich Null ist, also  $F_1$  eine Konstante ist. Damit folgt  $F(z) = c + (z-p)^{-l}(c(z-p)^l + P(z))$ . Das Polynom  $c(z-p)^l + P(z)$  hat den Grad  $l$  und kann in der Form  $\sum_{j=0}^l a_j z^j$  mit  $a_j \in \mathbb{C}$  geschrieben werden. Damit hat  $F$  die angegebene Gestalt.  $f$  erhält man durch die inverse z-Transformation, die man wegen der Linearität durch die Summe ziehen kann. Die Rücktransformation der einzelnen Summanden kann man mit 7.1.6 durchführen, wenn man beachtet, dass die Multiplikation mit  $z^j$  der Verschiebung des Signals um  $-j$  bedeutet. Damit erhält  $f$  die angegebene Form. Die Wachstumsaussagen ergeben sich dadurch, dass  $\binom{k-1+j}{l-1}$  wie  $k^{l-1}$  wächst und dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^l p^k = 0$ . q.e.d.

## 7.3 Die Systemfunktion diskreter LTI-Systeme

$Q$  sei ein diskretes LTI-System mit Impulsantwort  $h$ . Die  $z$ -Transformierte  $\mathcal{Z}(h)$  habe einen nichtleeren Konvergenzbereich  $\Omega_H \subset \mathbb{C}$ . Dann heißt die holomorphe Funktion  $H: \Omega_H \rightarrow \mathbb{C}$ , gegen die die Laurentreihe  $\mathcal{Z}(h)$  konvergiert, die *Systemfunktion* von  $Q$ .

### 7.3.1 Beschreibung von LTI-Systemen durch ihre Systemfunktion

Sei  $f$  ein Eingangssignal, dessen  $z$ -Transformierte  $\mathcal{Z}(f)$  einen nichtleeren Konvergenzbereich  $\Omega_F$  hat und dort gegen  $F$  konvergiert. Ist  $\Omega_F \cap \Omega_H \neq \emptyset$ , so existiert nach 7.1.4 das Faltungsprodukt  $f \star g$ , und es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(Qf)(z) &= \mathcal{Z}(f \star h)(z) \\ &= F(z) \cdot H(z)\end{aligned}$$

für  $z \in \Omega_F \cap \Omega_H$ . Weil  $\Omega_F$  und  $\Omega_H$  Kreisträger mit Mittelpunkt 0 sind, ist auch  $\Omega_F \cap \Omega_H$  einer, und für jede Kreislinie  $\Gamma$  in  $\Omega_F \cap \Omega_H$  mit Mittelpunkt 0 gilt

$$\begin{aligned}Qf(k) &= \mathcal{Z}^{-1}(F \cdot H)(k) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) \cdot H(z) z^{-k-1} dz.\end{aligned}$$

Man hat also eine Beschreibung ähnlich zu der durch die Fouriertransformation. Ist  $H$  auf der Einheitskreislinie holomorph, so gilt  $\hat{h}(\nu) = H(e^{2\pi i T \nu})$ . Es ist jedoch nicht zwingend, dass  $H$  auf der Einheitskreislinie holomorph ist.

In den meisten Fällen betrachtet man aber Systemfunktionen  $H$ , die auf der Einheitskreislinie holomorph sind. Der Vorteil der Systemfunktion gegenüber der Fouriertransformierten  $\hat{h}$  besteht häufig darin, dass  $H$  als Funktion der komplexen Variablen  $z$  eine relativ einfache Gestalt hat, während die Fouriertransformierte als Funktion von  $\nu$  unübersichtlicher ist. So ist der bei weitem wichtigste Fall der, dass  $H$  eine rationale Funktion ist. Das Verhalten einer rationalen Funktion auf der Einheitskreislinie lässt sich leicht an der Lage ihrer Pol- und Nullstellen ablesen; damit erhält man automatisch Aussagen über die Eigenschaften von  $\hat{h}$ , also den Amplituden- und Phasenfrequenzgang des Systems.

### 7.3.2 LTI-Systeme mit rationaler Systemfunktion

LTI-Systeme  $Q$ , deren Systemfunktion  $H$  rational ist, werden *Systeme endlicher Ordnung* genannt. Sie sind in der Praxis mit Abstand die häufigsten Systeme. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Jedes FIR-Filter hat eine rationale Systemfunktion.
- Schaltet man LTI-Systeme mit rationalen Systemfunktionen durch Addition und Subtraktion zusammen, so ergibt sich wieder ein System mit rationaler Systemfunktion (dazu mehr im übernächsten Abschnitt).
- Jedes System, das durch eine lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben ist, hat eine rationale Systemfunktion (dazu mehr im Kapitel über rekursive Filter).

An der Lage der Polstellen der Systemfunktion kann man das Wachstumsverhalten der Impulsantwort und die Stabilität des Systems ablesen. Dazu berechnet man die Partialbruchentwicklung von  $H$  wie im vorigen Abschnitt; jede Polstelle erzeugt dabei einen Summanden, den man mit 7.2.3 in den Zeitbereich zurücktransformiert. Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Aussagen.

**7.3.2.1 Satz** Das System  $Q$  habe die rationale Systemfunktion  $H$ . Dann gilt

- Liegen alle Pol von  $H$  in der offenen Einheitskreisscheibe, so ist  $Q$  stabil.
- Jeder Pol  $p$  mit  $|p| < 1$  bewirkt einen exponentiell abklingenden Anteil von  $h$ ; man nennt ihn einem *Transientenanteil*.
- Jeder Pol  $p$  mit  $|p| > 1$  bewirkt einen exponentiell ansteigenden Anteil von  $h$ .

- d) Jeder mehrfache Pol  $p$  mit  $|p| = 1$  bewirkt einen exponentiell ansteigenden Anteil von  $h$ .
- e) Jeder einfache Pol  $p$  mit  $|p| = 1$  bewirkt einen beschränkten Anteil von  $h$ .

**7.3.2.2 Bemerkung** Ist  $Q$  ein FIR-System, so hat die Systemfunktion höchstens in 0 und in  $\infty$  Pole.

## 7.4 Entwurf von Filtern durch Platzierung von Null- und Polstelle

$Q$  sei ein Filter, dessen Impulsantwort  $h$  reell und dessen Systemfunktion  $H$  rational sei. Dann gilt

$$H(\bar{z}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h((k)\bar{z}^{-k} = \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} h((k)z^{-k}} = \overline{H(z)}.$$

Folglich treten die Polstellen von  $H$  als konjugiert komplexe Paare auf oder sind reell.

### 7.4.1 Ein-Pol-Filter

Die Systemfunktion  $H$  habe genau eine Polstelle  $p$ . Sie hat also die Gestalt  $H(z) = \frac{A(z)}{z-p}$ , wobei  $p$  keine Nullstelle von  $A$  ist. Ist  $|p| < 1$ , so ist  $Q$  stabil.

Weil  $p$  die einzige Polstelle von  $H$  ist, kann  $p$  keinen konjugiert symmetrischen Partner außer sich selbst haben; folglich muss  $p$  reell sein.

**Erster Fall:**  $\text{grad}A = 0$ .

Dann ist  $H(z) = \frac{a}{z-p} = \frac{az^{-1}}{1-pz^{-1}}$ . Folglich wird  $|H(e^{-2\pi i\nu})|$  maximal für  $\nu = 0$ , wenn  $p > 0$ , und für  $\nu = \frac{1}{2}$ , wenn  $p < 0$ . Für  $p = 0$  ist  $Q$  ein Allpassfilter mit linearem Phasengang. Für  $p > 0$  hat  $Q$  Tiefpasscharakteristik, für  $p < 0$  Hochpasscharakteristik.

**Zweiter Fall:**  $\text{grad}A > 0$ .

Dann hat  $H$  Nullstellen, die den Amplitudenfrequenzgang in ihrer Nähe dämpfen. Um z.B. die Tiefpasscharakteristik für  $p > 0$  zu verbessern, kann man bei  $z = -1$  eine Nullstelle hinzufügen und erhält dann  $H(z) = \frac{a(z+1)}{z-p} = \frac{a+z^{-1}}{1-pz^{-1}}$ . Dadurch wird aber auch der Phasenfrequenzgang beeinflusst.

Sind  $p = 0$  und  $A(z) = z - 1$  (also eine Nullstelle bei 1), so gilt  $H(z) = 1 - z^{-1}$  und somit

$$H(e^{2\pi i\nu}) = 1 - e^{-2\pi i\nu} = e^{-\pi i\nu}(e^{\pi i\nu} - e^{-\pi i\nu}) = 2ie^{-\pi i\nu} \sin \pi\nu$$

und

$$|H(e^{2\pi i\nu})| = 2|\sin \pi\nu|,$$

folglich ist  $Q$  ein Hochpass.

Für  $p = 0$  und  $A(z) = z + 1$  erhält man entsprechend

$$|H(e^{2\pi i\nu})| = 2|\cos \pi\nu|,$$

folglich ist  $Q$  ein Tiefpass.

### 7.4.2 Zwei-Pol-Filter

Die Systemfunktion  $H$  von  $Q$  habe genau zwei Polstellen  $p_1$  und  $p_2$ . Weil  $h$  reell ist, sind sie konjugiert komplex zueinander.

Ist eine der beiden reell, so sind beide gleich.  $H$  hat dann also eine doppelte reelle Polstelle und verhält sich ähnlich wie Ein-Pol-Filter, nur ist die Filtercharakteristik ausgeprägter.

Sind die Pole nicht reell, so hat das Filter wegen der Symmetrie der Polstellen bezüglich der x-Achse Bandpasscharakteristik, die umso ausgeprägter ist, je näher die beiden Pole an der Einheitskreislinie liegen. Seien  $p_1 = |p_1|e^{2\pi i\omega_0}$  und  $p_2 = \bar{p}_1 = |p_1|e^{-2\pi i\omega_0}$ . Der Durchlassbereich ist eine Umgebung von  $\omega_0$ . Die 3dB-Bandbreite wird umso kleiner, je näher  $|p_1|$  bei 1 liegt. Ist  $|p_1|$  sehr nahe bei 1, so hat der Amplitudenfrequenzgang bei  $\omega_0$  ein recht scharfes Maximum. Man spricht dann auch von einem *Resonator*. Die Flanken des Durchlassbereichs lassen sich dadurch versteilern, dass man knapp neben  $e^{2\pi i\omega_0}$  und  $e^{-2\pi i\omega_0}$  Nullstellen setzt. Allerdings wird dadurch der Phasenfrequenzgang stark geändert.

### 7.4.3 Zweipolige Kerb- oder Notchfilter

Um eine Frequenz  $\omega_0$  vollständig zu unterdrücken, kann man  $H$  so wählen, dass es in  $e^{2\pi i\omega_0}$  und  $e^{-2\pi i\omega_0}$  Nullstellen hat; im einfachsten Fall also  $H(z) = (z - e^{2\pi i\omega_0})(z - e^{-2\pi i\omega_0})$ . Die Kerbe im Amplitudenfrequenzgang ist dann aber ziemlich breit. Um sie zu verschmälern, kann man in der Nähe dieser beiden Nullstellen noch zwei konjugiert komplexe Pole einsetzen. Dadurch bekommt man aber wieder Welligkeiten im Durchlassbereich, die man eventuell durch weitere Pole und Nullstellen dämpfen kann; das wird jedoch unübersichtlich.

### 7.4.4 Kammfilter

Ein Kammfilter ist ein Filter, dessen Amplitudenfrequenzgang eine Periode  $\frac{1}{T}$  mit  $l \in \mathbb{N}$  hat. Solche Filter kann man auf einfache Weise erhalten: Ist  $H$  die Systemfunktion eines stabilen Filters und ist  $l \in \mathbb{N}$ , so ist  $H_l(z) = H(z^l)$  die Systemfunktion eines Kammfilters, denn  $H_l(e^{2\pi iT\nu})$  hat die Periode  $\frac{1}{lT}$ . Kausalität und Stabilität gehen beim Übergang von  $H$  zu  $H_l$  nicht verloren.

### 7.4.5 Allpassfilter

Filter, deren Amplitudenfrequenzgang konstant ist, heißen *Allpassfilter*.

Die einfachsten Allpassfilter sind diejenigen, deren Systemfunktion die Gestalt  $H(z) = z^m$  hat. Sie sind nur dann kausal, wenn  $m < 0$  ist.

Mit Hilfe der Funktionentheorie kann man aber auch allgemeine Allpassfilter charakterisieren.

Sei  $Q$  ein kausales, stabiles Allpassfilter und  $H$  seine Systemfunktion. Nach 7.1.5 wissen wir, dass  $H$  für  $|z| \geq 1$  stetig und für  $|z| > 1$  holomorph und beschränkt ist und  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$  existiert (und  $\neq \infty$  ist). Folglich ist  $H(\frac{1}{z})$  stetig in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $\overline{D(0, 1)}$  und holomorph in der offenen Einheitskreisscheibe  $D(0, 1)$ , also eine sogenannte *innere Funktion*; das sind die beschränkten, holomorphen Funktionen  $f$  mit  $\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} |f(re^{2\pi i\varphi})| = 1$  für fast alle  $\varphi \in [0, 2\pi[$ . Es ist bekannt, wie die inneren Funktionen aussehen (siehe z.B. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Satz 17.15).

Falls  $H$  rational ist und reelle Koeffizienten hat, lässt sich die allgemeine Gestalt von  $H$  elementar herleiten. Dann gilt für  $|z| = 1$  nämlich  $\overline{H(z)} = H(\bar{z}) = H(\frac{1}{z})$  und somit  $H(z)H(\frac{1}{z}) = 1$ . Mit dem Identitätssatz folgt  $H(z)H(\frac{1}{z}) = 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , die keine Null- oder Polstellen von  $H$  sind. Also gilt für alle  $z \neq 0$ , die keine Null- oder Polstellen sind,

$$H\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{H(z)}.$$

In  $z = 0$  kann  $H$  keine Nullstellen haben; denn wegen  $H(z) = (H(\frac{1}{z}))^{-1}$  würde ansonsten  $H$  für  $z \rightarrow \infty$  nicht beschränkt bleiben.  $H$  kann in 0 aber eine Polstelle haben.

Daraus ergibt sich, dass für jedes  $z \neq 0$  gilt:

$$z \text{ Nullstelle von } H \Leftrightarrow \frac{1}{z} \text{ Polstelle von } H$$

Weil  $H$  reelle Koeffizienten hat, sind die Nullstellen bzw. Polstellen reell oder kommen als konjugiert komplexe Paare vor. Deshalb gilt für jedes  $z \neq 0$  auch

$$z \text{ Nullstelle von } H \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} \text{ Polstelle von } H$$

Von 0 verschiedene Null- und Polstellen entsprechen sich also vermöge Spiegelung an der Einheitskreislinie.

Weil das Filter stabil ist, liegen alle Polstellen von  $H$  in  $D(0, 1)$  und somit die Nullstellen außerhalb. Seien  $\zeta_1, \dots, \zeta_l$  diese Nullstellen. Falls 0 eine Polstelle von  $H$  ist, sei  $m$  ihre Vielfachheit; ansonsten sei  $m = 0$ . Indem man nun in Zähler und Nenner alle entsprechenden Linearfaktoren hinschreibt, bekommt  $H$  die Gestalt eines sogenannten *Blaschke-Produkts*

$$H(z) = z^{-m} \prod_{k=1}^l \frac{z - \zeta_k}{1 - \bar{\zeta}_k z}.$$

Jeder Faktor des Produkts ist ein Automorphismus des projektiven Raums  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ; er hat die Nullstelle  $\zeta_k$  und die Polstelle  $1/\bar{\zeta}_k$  und für  $|z| = 1$  den Betrag 1, weil  $z - \zeta_k = \bar{z} - \bar{\zeta}_k = \bar{z}(1 - z\bar{\zeta}_k)$ .

### 7.4.6 FIR-Filter

FIR-Filter haben nur eine Polstelle, nämlich  $z = 0$ . Ihr Amplituden- und Phasefrequenzgang ergibt sich allein aus der Verteilung der Nullstellen. Es gibt keinerlei Stabilitätsprobleme. Andererseits braucht man hohe Ordnungen (d.h. viele Nullstellen), wenn man darauf verzichtet, den Amplitudenfrequenzgang durch Polstellen zu beeinflussen.

### 7.4.7 Minimalphasenfilter

Ein Filter  $Q$  mit rationaler Systemfunktion  $H$  heißt *Minimalphasensystem*, wenn alle Null- und Polstellen von  $H$  in der offenen Einheitskreisscheibe liegen.

Ein Minimalphasensystem hat auch in  $\infty$  keine Null- oder Polstelle, ist somit nach 7.1.5 kausal.

Sei  $Q$  nun ein Minimalphasensystem mit Systemfunktion

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}.$$

Es gilt  $b_0 \neq 0$ , weil  $H$  in  $\infty$  keine Nullstelle haben kann. Die stetige Abbildung

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \nu \mapsto \frac{H(e^{2\pi i \nu})}{|H(e^{2\pi i \nu})|}$$

hat eine stetige Liftung  $\varphi : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass also gilt

$$\frac{H(e^{2\pi i \nu})}{|H(e^{2\pi i \nu})|} = e^{i\varphi(\nu)}$$

für  $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  oder anders ausgedrückt  $\arg H(e^{2\pi i \nu}) = \varphi(\nu)$  modulo  $2\pi$ .

Somit ist  $\nu \mapsto H(e^{2\pi i \nu})$  eine Kurve  $\Gamma$  in  $\mathbb{C}$ , die  $\frac{1}{2\pi}(\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(-\frac{1}{2}))$ -mal um den Nullpunkt läuft. Mit dem Residuensatz folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}(\varphi(\tfrac{1}{2}) - \varphi(-\tfrac{1}{2})) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{H'(z)}{H(z)} dz \\ &= \text{Anzahl der Nullstellen in } D(0, 1) - \text{Anzahl der Polstellen in } D(0, 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn eine rationale Funktion hat in der Riemannschen Zahlenkugel genau so viele Nullstellen wie Polstellen, und die Null- und Polstellen von  $H$  liegen alle in der Einheitskreisscheibe, weil  $Q$  ein Minimalphasensystem ist.

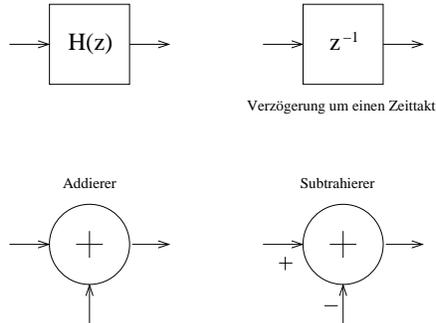
Für jedes stabile System, das kein Minimalphasensystem ist, aber denselben Amplitudenfrequenzgang hat, gilt dagegen

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) - \varphi(-\tfrac{1}{2}) < 0,$$

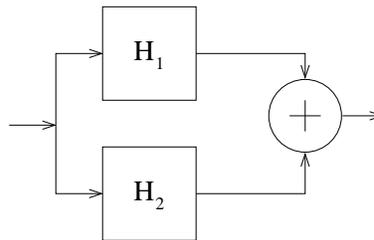
weil nicht alle Nullstellen in der Einheitskreisscheibe liegen, die Polstellen jedoch schon. Der Vorteil von Minimalphasensystemen besteht darin, dass sie minimale Zeitverzögerungen erzeugen.

## 7.5 Zusammenschaltung von LTI-Systemen

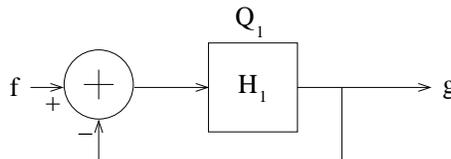
Oft werden mehrere LTI-Systeme auf irgendeine Weise zusammenschaltet. Um dies übersichtlich darzustellen, werden meist Blockschaltbilder verwendet, in denen jedes LTI-System durch ein Rechteck repräsentiert wird, in dem die Systemfunktion eingetragen ist. Weitere Schaltungselemente wie Addierer und Multiplizierer symbolisieren wir durch Kreise, die das entsprechende Operatorsymbol umschließen.

**Beispiele****7.5.1 Hintereinanderschaltung**

Die Hintereinanderschaltung ist wieder ein LTI-System mit der Systemfunktion  $H = H_1 \cdot H_2$ . Im Gegensatz zur Hintereinanderschaltung beliebiger Systeme kommt es bei der Hintereinanderschaltung von LTI-Systemen nicht auf die Reihenfolge an!

**7.5.2 Parallelschaltung**

Die Systemfunktion des gesamten Systems ist  $H = H_1 + H_2$  bzw.  $H = H_1 - H_2$ .

**7.5.3 Rückkopplung (feed back)**

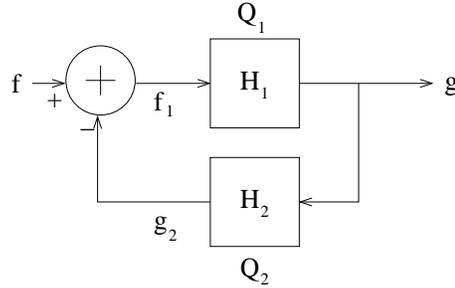
Für die  $z$ -Transformierten  $F$  und  $G$  der Signale  $f$  und  $g$  gilt  $G = H_1(F - G) = H_1F - H_1G$  und folglich

$$G = \frac{H_1}{1 + H_1} F.$$

Somit hat das gesamte System die Systemfunktion

$$H = \frac{H_1}{1 + H_1}.$$

In den Rückkopplungsweig kann man ein weiteres System  $Q_2$  mit Systemfunktion  $H_2$  einfügen.



Für die z-Transformierten  $F, F_1, G, G_2$  der Signale  $f, f_1, g, g_2$  gilt  $G = H_1 F_1 = H_1(F - H_2 G) = H_1 F - H_1 H_2 G$  und folglich

$$G = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} F.$$

Somit hat die Systemfunktion des gesamten Systems die Gestalt

$$H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2}.$$

**Achtung!** Durch Rückkopplungen können aus stabilen Systemen instabile Gesamtsysteme entstehen. Denn der Nenner  $1 + H_1$  bzw.  $1 + H_1 H_2$  kann Nullstellen und somit das Gesamtsystem Polstellen haben. Das ist meistens nicht erwünscht; es gibt aber auch Anwendungen, wo man genau das ausnutzt, nämlich um Oszillatoren zu bauen. Man spricht dann von einer positiven Rückkopplung oder Mitkopplung im Gegensatz zur Gegenkopplung.

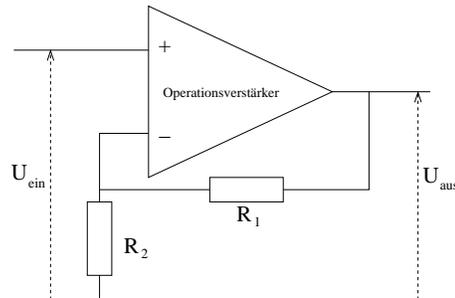
Wir wollen hier ein einfaches Anwendungsbeispiel angeben, wie man den Verstärkungsfaktor elektronischer Verstärker unempfindlich gegenüber Umwelteinflüssen machen kann. Solche Schaltungen kommen in mehr oder weniger abgewandelter Form in nahezu jedem elektronischen Gerät vor.

**Beispiel: Rückgekoppelter Verstärker**

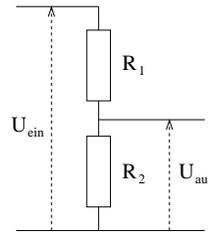
Das System  $Q_1$  sei ein Verstärker mit zwei Eingängen, an denen man Spannungen  $U_+$  und  $U_-$  anlegen kann, und einem Ausgang, an dem die Spannung  $U_{\text{aus}}$  ausgegeben wird. Die Ausgangsspannung sei proportional zur Differenz der Spannungen an den beiden Eingängen, d.h. es gelte

$$U_{\text{aus}} = V(U_+ - U_-),$$

wobei  $V > 0$  die sogenannte Leerlaufverstärkung ist. Elektronische Bausteine mit dieser Funktion nennt man *Operationsverstärker*. Sie beinhalten schon den Subtrahierer, der für die Rückkopplung nötig ist. Die Systemfunktion nur des Verstärkers ist einfach die konstante Funktion  $H_1 = V$ . Der Wert  $V$  ist i.a. sehr groß ( $> 10^5$ ). Er hängt jedoch von Umwelteinflüssen ab, vor allem infolge von Temperaturschwankungen kann er stark variieren. Dadurch würden viele elektronische Schaltungen in ihrer Funktion beeinträchtigt oder sogar instabil. Deshalb verwendet man eine Rückkopplung, um den Verstärkungsfaktor stabil zu halten.



Das System  $Q_2$  bestehe lediglich aus einem Spannungsteiler, der aus zwei Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  aufgebaut ist.



Weil beide Widerstände in Serie liegen, werden sie von demselben Strom durchflossen, so dass nach dem Ohmschen Gesetz die Spannungen an den Widerständen in demselben Verhältnis stehen wie die Widerstandswerte. Es gilt also

$$U_{\text{aus}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{ein}}.$$

Das System  $Q_2$  hat somit auch eine konstante Systemfunktion, nämlich  $H_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ .

Und das gesamte, rückgekoppelte System hat folglich die - ebenfalls konstante - Systemfunktion

$$H = \frac{V}{1 + \frac{VR_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{\frac{R_1 + R_2}{V} + R_2}.$$

Ist nun  $V$  sehr groß im Vergleich zu den Widerstandswerten, so gilt mit guter Näherung

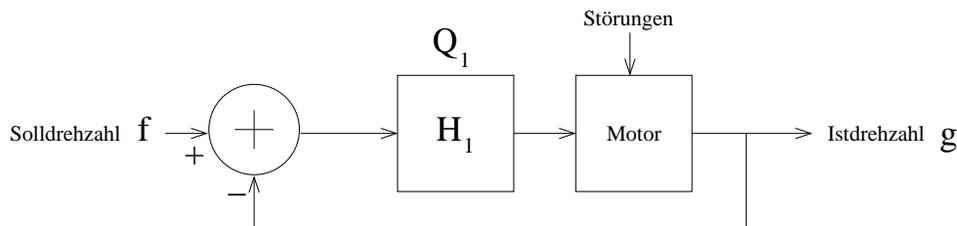
$$H = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1.$$

Das rückgekoppelte System benimmt sich also wie ein Verstärker, dessen Verstärkung nahezu nur von dem Verhältnis der beiden Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  bestimmt wird. Die Leerlaufverstärkung des Operationsverstärkers spielt kaum eine Rolle, solange sie nur sehr hoch ist. Ändert sie sich infolge von Temperaturschwankungen, so wirkt sich dies nach obigen Überlegungen kaum auf die Verstärkung des rückgekoppelten Systems aus.

Reale Verstärker benehmen sich bei höherfrequenten Eingangssignalen meist nicht mehr wie ideale Verstärker, sondern bewirken Phasenverschiebungen, die dazu führen, dass der Nenner der Systemfunktion Nullstellen hat, die zu Instabilitäten führen, wenn sie nicht innerhalb der Einheitskreisscheibe liegen. Anschaulich bedeutet dies, dass das rückgekoppelte Signal gleichphasig zum Eingangssignal wird und somit das Eingangssignal nicht abschwächt, sondern vergrößert.

## 7.6 Regelungssysteme

Rückkopplungen werden verwendet, um Steuerungen gegenüber Störungen unempfindlicher zu machen. Beispielsweise kann die Leerlaufdrehzahl eines Elektromotors durch die Versorgungsspannung gesteuert werden. Sobald jedoch der Motor belastet wird, wird er gebremst. Diese Verringerung der Drehzahl kann man zwar durch Erhöhung der Versorgungsspannung ausgleichen, nur ist die Größe der benötigten Erhöhung von der meist unbekanntenen Last abhängig. Deshalb vergleicht man die tatsächliche Drehzahl  $g$ , den sogenannten Istwert, mit der gewünschten Drehzahl, dem sogenannten Sollwert, und verwendet deren Differenz, das sogenannte Fehlersignal, um die Versorgungsspannung geeignet zu verändern.

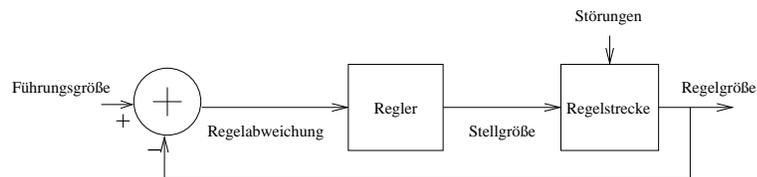


Es gilt  $G = H_{\text{Motor}} H_1 (F - G)$ , also

$$G = \frac{H_{\text{Motor}} H_1}{1 + H_{\text{Motor}} H_1} F = \frac{1}{\frac{1}{H_{\text{Motor}} H_1} + 1} F.$$

Wählt man  $H_1$  so, dass es betragsmäßig groß gegenüber  $H_{\text{Motor}}$  und gegenüber 1 ist, so ist  $G$  nahezu gleich  $F$ . Somit stimmen der Istwert der Drehzahl nahezu mit dem Sollwert überein, und er hängt auch kaum noch von Veränderungen der Motorsystemfunktion infolge von Störungen ab.

Dieses Prinzip der Regelung durch Rückkopplung ist Grundlage nahezu aller technischer Anwendungen und auch vieler mathematischer Modelle aus anderen Bereichen. Die allgemeine Form ist folgende.



### 7.6.1 PID-Regler

Im einfachsten Fall wählt man in einem Regelungssystem das System  $Q_1$  als Verstärker mit hoher Verstärkung ohne Phasenverschiebung, d.h. man wählt  $H_1$  als Konstante. Dies erfüllt jedoch nicht immer alle Wünsche, wie die folgende Überlegung zeigt.

Wir nehmen an, dass in obigem Beispiel der Istwert und der Sollwert der Drehzahl zunächst exakt übereinstimmen und somit das Fehlersignal Null ist. Wenn nun plötzlich der Motor stark belastet wird, wird sich seine Drehzahl, also der Istwert, sehr schnell verringern. Dadurch wird ein Fehlersignal erzeugt, das zu einer Erhöhung der Versorgungsspannung führt. Zwei Beobachtungen führen dazu, dass das System  $Q_1$  meist nicht nur als einfacher Verstärker ausgelegt wird.

- Weil ein Motor (und viele andere Systeme auch) eine gewisse Trägheit haben, wird die Erhöhung der Versorgungsspannung erst mit einer gewissen Zeitverzögerung zu einer deutlichen Erhöhung der Drehzahl führen. Um diesen Vorgang zu beschleunigen, kann man versuchen, die Versorgungsspannung nicht einfach proportional zum Fehlersignal zu erhöhen, sondern zu einem Teil auch proportional zur Anstiegsgeschwindigkeit des Fehlersignals; das wäre im kontinuierlichen Fall die zeitliche Ableitung des Fehlersignals. Das System  $Q_1$  soll also auch einen Differentiator enthalten.
- Solange der Motor belastet wird, ist seine Systemfunktion  $H_{\text{Motor}}$  von der im Leerlauf verschieden. Um dies auszugleichen, wird das Fehlersignal verstärkt und damit die Versorgungsspannung entsprechend geändert. Deshalb kann das Fehlersignal nie ganz Null werden, d.h. der Istwert und der Sollwert der Drehzahl können nicht exakt übereinstimmen. Um diesen Restfehler auch noch zu beseitigen (oder wenigstens zu verkleinern), fügt man dem System  $Q_1$  oft einen Anteil hinzu, der die vergangenen Fehlersignalwerte aufsummiert. Im kontinuierlichen Fall entspricht dies dem Integral. Deshalb nennt man so einen Systemanteil auch Integrator.

$Q_1$  wird oft als Parallelschaltung eines linearen Verstärkers, eines Differentiators und eines Integrators gewählt. Man spricht dann von einem *PID-Regler*.

Durch ungeschickte Wahl des differenzierenden oder integrierenden Anteils kann es allerdings passieren, dass das gesamte System instabil wird und mehr oder weniger periodische Schwingungen entstehen.

# Kapitel 8

## Rekursive Filter

### 8.1 Rekursive Systeme

**8.1.1 Definition**  $Q$  sei ein diskretes System.

- a) Eine *rekursive Realisierung* von  $Q$  ist eine partiell definierte Abbildung  $\Phi: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{M+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$g(j) = \Phi(g(j-1), \dots, g(j-N), f(j), f(j-1), \dots, f(j-M))$$

für jedes zulässige Eingangssignal  $f$  und zugehöriges Ausgangssignal  $g = Qf$  und jedes  $j \in \mathbb{Z}$  gilt. Dabei seien  $M \geq 0$  und  $N > 0$ , und  $\Phi$  hänge von seinem  $N$ -ten Argument wirklich ab.  $N$  nennt man oft die Ordnung des Systems.

- b) Eine *transversale* (nichtrekursive) *Realisierung* von  $Q$  ist eine partiell definierte Abbildung  $\Psi: \mathbb{C}^{M+1} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$g(j) = \Psi(f(j), f(j-1), \dots, f(j-M))$$

für jedes zulässige Eingangssignal  $f$  und zugehöriges Ausgangssignal  $g = Qf$  und jedes  $j \in \mathbb{Z}$  gilt. Wenn  $\Psi$  wirklich von seinem letzten Argument abhängt, nennt man  $M$  die Ordnung des Systems.

Es ist üblich, einfach von einem *rekursiven* oder *transversalem System* zu sprechen; gemeint ist damit ein System, das durch rekursive oder transversale Realisierung gegeben ist.

Um den Ausgangswert  $g(j)$  eines rekursiven Systems der Ordnung  $N$  berechnen zu können, braucht man die vorhergehenden Werte  $g(j-1), \dots, g(j-N)$ . Sie müssen in einem Gedächtnis gespeichert werden. In Anwendungen schaltet man ein System erst zu einem gewissen Zeitpunkt ein. Meist wählt man dafür  $j = 0$ . Dann braucht man Werte  $g(-1), \dots, g(-N)$ , die den Zustand des Systems im Augenblick des Einschaltens beschreiben. Ein rekursives System  $N$ -ter Ordnung heißt *relaxiert*, wenn  $g(-1) = \dots = g(-N) = 0$  ist. Die Ausgangswerte eines rekursiven Systems können nur sukzessive in aufsteigender Reihenfolge berechnet werden. Transversale Systeme dagegen gestatten die unabhängige Berechnung von Ausgangswerten zu beliebigen Zeitpunkten.

#### 8.1.2 Beispiele

- a)  $Qf(j) = \sum_{k=0}^{\infty} f(j-k)$

Eine rekursive Realisierung ist  $g(j) = Qf(j) = f(j) + g(j-1)$ .

- b)  $Qf(j) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j f(k)$  für  $j \geq 0$  und 0 sonst.

Es gilt  $(j+1)g(j) = f(j) + jg(j-1)$ , also  $g(j) = \frac{j}{j+1}g(j-1) + \frac{1}{j+1}f(j)$ . Dies ist eine rekursive Realisierung, wenn man  $g(j) = 0$  für  $j < 0$  setzt. Man vergleiche den Rechenaufwand!

- c)  $Qf(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)$

Es gilt  $Ng(j) = f(j) - f(j-N) + Ng(j-1)$ , also  $g(j) = g(j-1) + \frac{1}{N}(f(j) - f(j-N))$ .

d)  $g(j) = \frac{1}{2}(g(j-1) + \frac{f(j)}{g(j-1)})$  für  $j \geq 0$ .

Für  $f = a \text{ step}_0$ ,  $a \geq 0$ ,  $g(-1) \approx \sqrt{a}$ , konvergiert  $g(j)$  gegen  $\sqrt{a}$ .

**Vorteile rekursiver Realisierungen:** Häufig geringerer Rechenaufwand. Manche IIR-Systeme lassen sich rekursiv realisieren mit geringer Ordnung.

**Nachteile:** Durch Rundungsfehler kann es zu Schwingungen und Instabilitäten kommen.

## 8.2 Lineare rekursive Filter

Eine besonders wichtige Klasse rekursiver Systeme bilden diejenigen Systeme  $Q$ , die als rekursive Realisierung eine *lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten* haben, für die also mit Koeffizienten  $a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M, g(-1), \dots, g(-N) \in \mathbb{C}$  glit

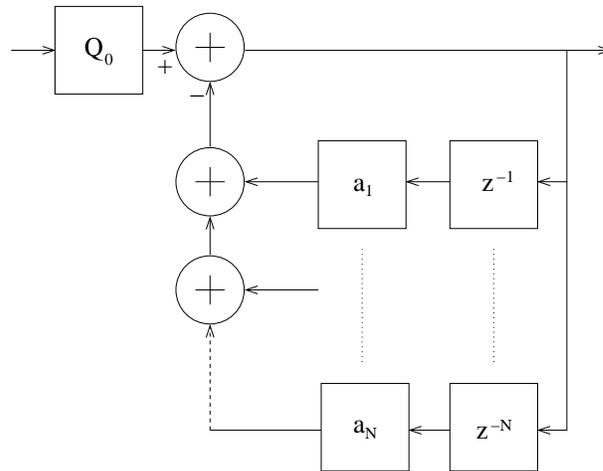
$$g = Qf \Leftrightarrow g(j) = -\sum_{n=1}^N a_n g(j-n) + \sum_{m=0}^M b_m f(j-m) \text{ für } j \geq 0.$$

Solche Systeme werden wir kurz *LDKK-Systeme* oder *lineare rekursive Filter* nennen. Die Ordnung eines solchen Systems sei  $\max\{j : a_j \neq 0 \text{ oder } b_j \neq 0\}$ .

**Bemerkung** Ein LDKK-System lässt sich als Hintereinanderschaltung des FIR-Systems

$$Q_0 f(j) = \sum_{m=0}^M b_m f(j-m)$$

und eines rückgekoppelten Systems verstehen. Das rückgekoppelte System entsteht aus der identischen Abbildung, indem man sie mit der Parallelschaltung von Systemen  $Q_n$  rückkoppelt, die jeweils durch Hintereinanderschaltung eines Verzögerers um  $n$  Zeittakte und eines Verstärkers mit Verstärkung  $a_n$  bestehen.



### 8.2.1 Vereinbarung

Wir betrachten künftig das Ausgangssignal von LDKK-Systemen meist nur für Zeiten  $j \geq 0$  und fassen LDKK-Systeme als Abbildungen  $Q: \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$  auf. Im Zeitpunkt 0 ist das System in einem Anfangszustand, der durch die Werte  $g(-1), \dots, g(-N)$  in seinem Gedächtnisspeicher gegeben ist.

**8.2.2 Satz** Ein LDKK-System ist auf allen Signalen definiert.

**Beweis:** Durch vollständige Induktion sieht man, dass  $g(j)$  für jedes  $j \geq 0$  definiert ist.

**8.2.3 Satz:** Ein relaxiertes LDKK-System  $Q$  ist linear und für kausale Eingangssignale invariant unter positiven Translationen, d.h. sind  $f$  kausal und  $k > 0$ , so gilt  $Q(\tau_k f) = \tau_k(Qf)$ .

**Beweis:** Durch vollständige Induktion nach  $j$ .

**8.2.4 Satz** Ein relaxiertes LDKK-System  $Q$  ist durch seine Impulsantwort  $h = Q\delta_0$  eindeutig bestimmt, und zwar gilt (mit  $M$  wie oben)

$$Qf(j) = \sum_{k=-M}^j f(k)h(j-k)$$

**Bemerkung:** Setzt man  $f(k) = 0$  für  $k < -M$  und  $h(k) = 0$  für  $k < 0$ , so kann man obige Formel in der Gestalt

$$Qf(j) = h \star f(j) \text{ für } j \geq 0$$

schreiben.  $Q$  lässt sich also als Faltungsoperator auffassen.

**Beweis:** Es gilt  $Q(\delta_k) = Q(\tau_k\delta_0) = \tau_k Q(\delta_0) = \tau_k h$  für  $k \geq 0$ . Sei nun  $j \geq 0$ . Setze

$$\tilde{f} = \sum_{k=-M}^j f(k)\delta_k.$$

Weil  $Qf(j)$  nur von  $f(-M), \dots, f(j)$  abhängt, gilt

$$Qf(j) = Q\tilde{f}(j) = \sum_{k=-M}^j f(k)Q\delta_k(j) = \sum_{k=-M}^j f(k)\tau_k h(j) = \sum_{k=-M}^j f(k)h(j-k).$$

**8.2.5 Satz** Die Systemfunktion eines LDKK-System ist rational.

**Beweis:** Das System  $Q$  sei gegeben durch die Differenzgleichung

$$g(j) + \sum_{n=0}^N a_n g(j-n) = \sum_{m=0}^M b_m f(j-m).$$

Dann folgt für die  $z$ -Transformierten

$$G + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n} G = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} F,$$

also

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}.$$

**8.2.6 Skizze der Lösungstheorie linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Gegeben seien  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$  und eine Abbildung  $r: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Gesucht sind die Lösungen  $g: \{j \in \mathbb{Z}: j \geq -N\} \rightarrow \mathbb{C}$  der Differenzgleichung

$$g(j) + \sum_{n=1}^N a_n g(j-n) = r(j). \quad (\text{IHDG})$$

Die Gleichung

$$g(j) + \sum_{n=1}^N a_n g(j-n) = 0 \quad (\text{HDG})$$

heißt die zugehörigen homogenen Differenzgleichung.

Wir erinnern an einige grundlegende Aussagen über die Lösungen solcher Gleichungen.

**8.2.6.1 Satz** Die Lösungen der homogenen Gleichung (HDG) bilden einen  $N$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{L}$  über  $\mathbb{C}$ .

**8.2.6.2 Satz** Die Lösungen der inhomogenen Gleichung (IHDG) bilden einen  $N$ -dimensionalen affinen Raum der Gestalt  $g_0 + \mathcal{L}$ , wobei  $g_0$  eine (sog. partikuläre) Lösung von (IHDG) ist.

**8.2.6.3 Satz** Die Abbildung  $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}^N$ ,  $g \mapsto (g(-1), \dots, g(-N))$  ist ein Isomorphismus.

Man erinnere sich, dass man zum Beweis von 8.2.6.1 den Ansatz  $g(j) = \alpha^j$  für ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  macht. Setzt man diese Funktion in die homogene Gleichung (HDG) ein, so erhält man

$$0 = \alpha^j + \sum_{n=1}^N a_n \alpha^{j-n} = \alpha^{j-N} (\alpha^N + \sum_{n=1}^N a_n \alpha^{N-n}).$$

Ist  $g$  nicht die triviale Lösung, also  $\alpha \neq 0$ , so muss die sog. *charakteristische Gleichung*

$$\alpha^N + \sum_{n=1}^N a_n \alpha^{N-n} = 0$$

gelten. Dies führt auf den folgenden Satz.

**8.2.6.4 Satz**  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  seien die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (HDG) mit den Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_l$ . dann bilden die für  $j \geq -N$  definierten Funktionen

$$\alpha_1^j, j\alpha_1^j, \dots, j^{\mu_1-1}\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, j\alpha_2^j, \dots, \alpha_l^j, j\alpha_l^j, \dots, j^{\mu_l-1}\alpha_l^j$$

eine Basis des Lösungsraums  $\mathcal{L}$  von (HDG).

Sind alle Wurzeln einfach, so bilden die Funktionen  $\alpha_1^j, \dots, \alpha_l^j$  eine Basis.

Die Aussagen über die Struktur des Lösungsraums linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man auf LDKK-Systeme anwenden.

### 8.2.7 Spezielle Systemantworten

Das LDKK-System  $Q$  sei gegeben durch die Differenzgleichung

$$g(j) + \sum_{n=1}^N a_n g(j-n) = r(j) \quad \text{mit} \quad r(j) = \sum_{m=0}^M b_m f(j-m).$$

Als Anfangszustand sei ein Vektor  $(g(-N), \dots, g(-1)) \in \mathbb{C}^N$  gegeben. Nach 8.2.6.2 hat für jedes  $f$  die Lösung  $g$  von (IHDG) die Gestalt  $g = g_{\text{part}} + g_{\text{homog}}$ , wobei  $g_{\text{part}}$  irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, die nicht unbedingt zu dem gegebenen Anfangszustand passt, und  $g_{\text{homog}}$  eine geeignete Lösung der homogenen Gleichung. Diese Aufspaltung ist nicht eindeutig; sie wird es erst, wenn man noch verlangt, dass gewisse Anfangszustände erfüllt sind.

Es gilt  $Qf = g_{\text{nz}} + g_{\text{ne}}$ , wenn man folgendes definiert.

Als *Nullzustandsantwort*  $g_{\text{nz}}$  (*zero state response*) des Systems auf das Eingangssignal  $f$  bezeichnet man diejenige partikuläre Lösung  $g_{\text{part}}$  der inhomogenen Gleichung, welche die Anfangsbedingungen  $(0, \dots, 0)$  erfüllt. Man bezeichnet  $g_{\text{nz}}$  auch als die *erzwungene Antwort* des Systems.

Als *Nulleingangsantwort*  $g_{\text{ne}}$  (*zero input response*) des Systems bezeichnet man diejenige Lösung  $g_{\text{homog}}$  der homogenen Gleichung ( $f = 0$  und damit  $r = 0$ ), welche die gegebenen Anfangsbedingungen  $(g(-N), \dots, g(-1))$  erfüllt. Man nennt  $g_{\text{ne}}$  auch die *natürliche* oder *freie Antwort* des Systems. Sie hängt nicht von  $f$  ab.

**8.2.8 Bemerkung** Die Stabilität eines LDKK-Systems  $Q$  hängt von der Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung seiner definierenden Differenzgleichung ab. Hat eine Wurzel einen Betrag  $> 1$ , so folgt mit 8.2.6.4, dass es einen Anfangszustand gibt, so dass die zugehörige Nulleingangsantwort nicht beschränkt ist. Liegen dagegen alle Wurzeln in der offenen Einheitskreisscheibe, so sind alle Nulleingangsantworten beschränkt; ihre Werte nehmen sogar exponentiell ab und zwar um so schneller, je kleiner der Betrag der Wurzeln ist.

**8.2.9 Satz** Das LDKK-System  $Q$  sei gegeben durch die Gleichung

$$g(j) = - \sum_{n=1}^N a_n g(j-n) + \sum_{m=0}^M b_m f(j-m).$$

Gilt  $N > M > 0$  und  $a_N \neq 0 \neq b_M$ , so hat die Impulsantwort des relaxierten Systems unendlichen Träger.

**Beweisskizze:**

- a) Behauptung: Es gibt einen Anfangszustand  $(g(-1), \dots, g(-N)) \in \mathbb{C}^N$ , so dass die Impulsantwort  $g_0 = Q\delta_0$  des Systems mit diesem Anfangszustand für  $j \geq 0$  verschwindet.  
 Beweis der Behauptung: Gesucht sind  $g(-N), \dots, g(0), \dots, g(M)$ , die das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned} b_0 &= g(0) + \sum_{n=1}^N a_n g(-n) \\ b_1 &= g(1) + \sum_{n=1}^N a_n g(1-n) \\ &\vdots = \vdots \\ b_M &= g(M) + \sum_{n=1}^N a_n g(M-n) \\ 0 &= g(M+1-N) \\ &\vdots = \vdots \\ 0 &= g(M) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus  $M+1+N$  Gleichungen. Wir können es in der Form  $b = A \cdot x$  schreiben, indem wir  $b = (b_0, \dots, b_M, 0, \dots, 0)^t$  setzen und

$$A = \begin{pmatrix} a_N & a_{N-1} & \dots & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_N & \dots & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & a_N & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen  $a_N \neq 0$  hat die Matrix den Rang  $N+M+1$ . Das Gleichungssystem hat also immer eine Lösung. Die dadurch und durch die Differenzengleichung bestimmte Folge  $g_0$  ist die gesuchte Impulsantwort.

- b) Die zugehörige homogene Differenzengleichung hat eine Lösung  $h$ , welche die nach a) existierenden Anfangswerte  $-g(-N), \dots, -g(-1)$  besitzt. Dann ist  $g_0 + h$  die Lösung der inhomogenen Differenzengleichung mit den Anfangswerten  $(0, \dots, 0)$  und  $f = \delta_0$ , d.h.  $g_0 + h$  ist die Impulsantwort des relaxierten Systems. Weil  $g_0(j) = 0$  für  $j \geq 0$ , ist also die Impulsantwort des relaxierten Systems die Lösung der homogenen Differenzengleichung mit den Anfangswerten  $(-g(-N), \dots, -g(-1)) \neq (0, \dots, 0)$ .
- c) Nach b) und 8.2.6.4 ist die Impulsantwort  $h = Q\delta_0$  des relaxierten Systems eine nichttriviale Linearkombination der in 8.2.6.4 angegebenen Basisfunktionen. Aufgrund der Gestalt dieser Funktionen weiß man, dass jede nichttriviale Linearkombination höchstens endlich viele Nullstellen  $j \geq 0$  hat. q.e.d

**Achtung!** Für  $M \geq N$  ist die Aussage nicht richtig! Gleitende Mittel sind ein Gegenbeispiel.



# Kapitel 9

## Zeitliche Beschränkung

### 9.1 Zeitliche Beschränkung von Signalen

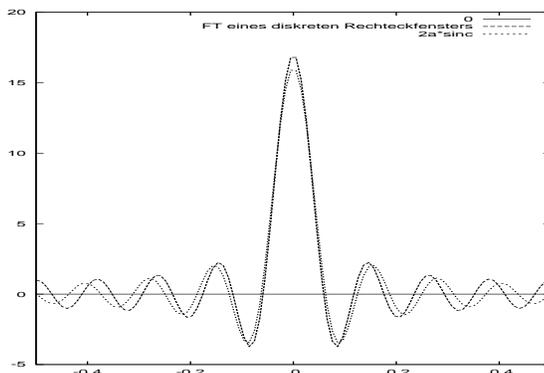
In der praktischen Anwendung steht oft nur die Restriktion eines Signals  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  auf ein relativ kleines, endliches Zeitintervall  $I$  zur weiteren Verarbeitung zur Verfügung. Daraus kann man natürlich keine Schlüsse auf das ganze Signal ziehen. Wir wollen untersuchen, inwieweit das unter gewissen Voraussetzungen an  $f$  doch möglich, z.B. wenn  $f$  periodisch ist. Außerdem hatten wir schon einmal überlegt, wie man die Ausgangswerte von FIR-Filtern aus endlichen Abschnitten des Abschnitten des Eingangssignals im Zeitbereich berechnen kann. Hier wollen wir dies nun im Frequenzbereich versuchen.

#### 9.1.1 Rechteckfenster

Gegeben sei ein Signal  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Einschränkung von  $f$  auf ein beschränktes Intervall  $I$  werde durch Null wieder zu einem Signal  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt.  $g$  entsteht also aus  $f$  durch Multiplikation mit der Indikatorfunktion  $\chi_I$  des Intervalls  $I$ . Für die Fouriertransformierte von  $g$  gilt somit  $\hat{g} = \hat{f} \star \hat{\chi}_I$ . Ist  $I = \{-a, \dots, a\}$  ein zu 0 symmetrisches Intervall, so ist

$$\hat{\chi}(\nu) = \sum_{k=-a}^a e^{-2\pi i T k \nu} = 1 + 2 \sum_{k=1}^a \cos 2\pi T k \nu$$

Der genaue Verlauf des Funktionsgraphen ist nicht unmittelbar ersichtlich. In dem folgenden Diagramm ist die Funktion für  $a = 8$  und  $T = 1$  in dem Intervall  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  gezeichnet. Im Vergleich dazu ist der Verlauf der Funktion  $\frac{\sin 2\pi a \nu}{\pi \nu}$  eingezeichnet.



Man sieht, dass die beiden Funktionen recht gut übereinstimmen, was nicht verwunderlich ist, weil die obige Fouriersumme eine Partialsumme des Fourierintegrals der kontinuierlichen Indikatorfunktion  $\chi_{[-a, a]}$  des Intervalls  $[-a, a]$  in  $\mathbb{R}$  ist und sich dieses Integral folgendermaßen berechnen lässt.

$$\int_a^a e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{1}{2\pi i \nu} [e^{-2\pi i \nu t}]_{-a}^a = \frac{1}{2\pi i \nu} (e^{-2\pi i \nu a} - e^{2\pi i \nu a}) = \frac{\sin 2\pi a \nu}{\pi \nu} = 2a \operatorname{sinc} 2\pi a \nu$$

Die zeitliche Beschränkung durch Multiplikation mit  $\hat{\chi}_I$  bewirkt also, dass die Fouriertransformierte von  $f$  mit einer sinc-ähnlichen Funktion gefaltet wird. Abschaulich gesprochen wird die ursprüngliche Fouriertransformierte  $\hat{f}$  somit verschmiert. Dies ist meist unerwünscht, vor allem wenn  $f$  periodisch ist und somit eine Überlagerung endlich vieler harmonischer Schwingungen ist. Durch die Multiplikation von  $f$  mit  $\hat{\chi}_I$  wird jede der in  $f$  beteiligten, endlich vielen Frequenzen verbreitert zu einem Gemisch von kontinuierlich vielen Frequenzen, dessen Verteilung durch eine sinc-ähnliche Funktion beschreiben wird. Infolge der Breite der Hauptkeule von  $|\text{sinc}|$  und der Höhe der Nebenkeulen ist es schwer, auf das ursprüngliche Signal  $f$  zurückzuschließen.

**9.1.1.1 Allgemeinerer Fensterfunktionen**

Wie kann man die Hauptkeule verschmälern und die Höhe der Nebenkeulen verringern? Dies gelingt in bescheidenem Rahmen dadurch, dass man bei der zeitlichen Beschränkung des Signals  $f$  eine Gewichtung einführt, die die Signalwerte am Anfang und am Ende des Intervalls  $I$  weniger stark gewichtet. Dazu multipliziert man  $f$  nicht mit  $\chi_I$ , sondern mit einer sogenannten *Fensterfunktion*  $w$ ; darunter versteht eine Funktion  $w: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  mit beschränktem Träger, die i.A. symmetrisch zum Mittelpunkt ihres Trägers ist und typischerweise nahe bei 1 hat und am Rande ihres Trägers gegen Null geht. Dadurch werden Unstetigkeiten im begrenzten Signal  $f \cdot w$  vermieden, die zu starken Veränderungen des Spektrums von  $f$  führen.

Um Fensterfunktionen anzugeben, wählt man der Übersichtlichkeit halber ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall als Träger und gibt die Fensterfunktion  $w$  als kontinuierliche Funktion auf  $\mathbb{R}$  an. Für diskrete Signale tastet man sie ab. Die Fouriertransformierte der kontinuierlichen Fensterfunktion ist meist leichter explizit analytisch zu berechnen als die der diskretisierten Fensterfunktion. Mit demselben Argument wie oben kann man davon ausgehen, dass für eine große Zahl von Abtastzeitpunkten innerhalb des Trägers die diskrete Fouriertransformierte und die kontinuierliche innerhalb des normierten Frequenzbereichs  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  gut übereinstimmen. Deshalb werden üblicherweise Fensterfunktionen stets im Kontinuierlichen angegeben.

**9.1.1.2 Beispiele**

- 1. Rechteckfenster

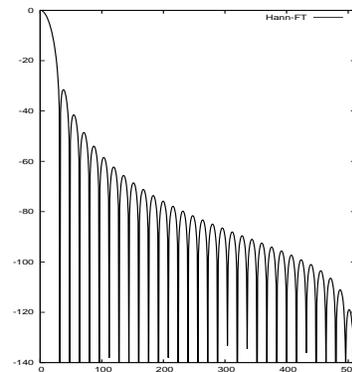
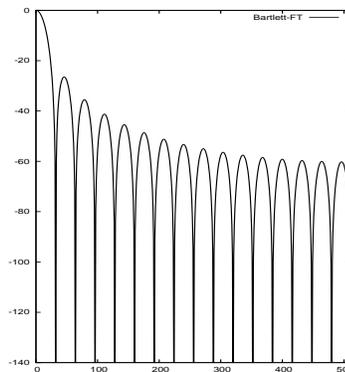
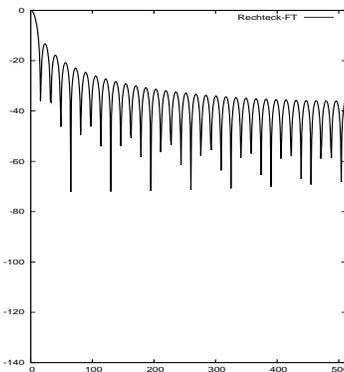
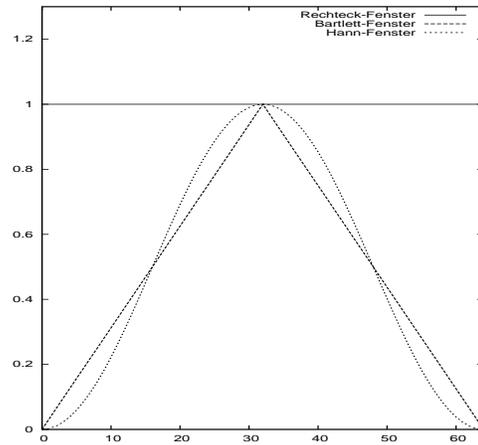
$$w(t) = \chi_{[-a,a]}(t)$$

- 2. Dreiecksfenster oder Bartlettfenster

$$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 3. Hannfenster

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi t}{a}) & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



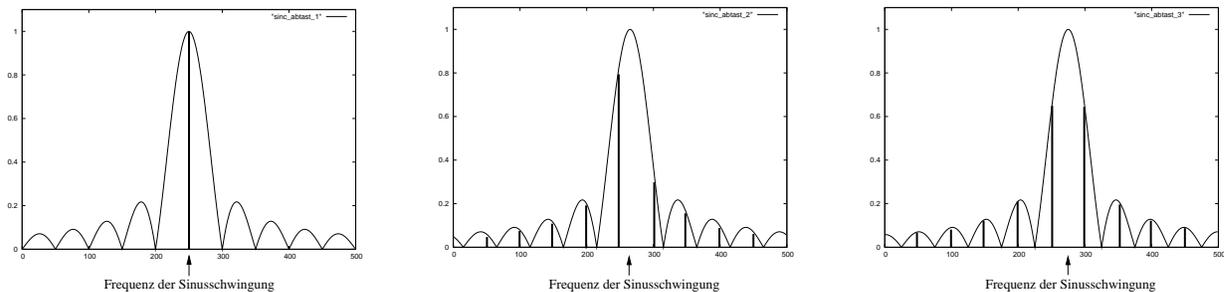
Amplitudenspektren der Fenster (y-Achse in dB)

### 9.1.2 Aliaseffekte durch Diskretisierung des Spektrums

Bisher hatten wir überlegt, wie sich das Spektrum eines Signals  $f$  durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion  $w$  verändert. In digitalen Rechnern kann man die Fouriertransformierte des zeitlich beschränkten Signals  $f \cdot w$  nicht für alle Punkte im normierten Frequenzbereich  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  berechnen. Man wird stattdessen das Signal  $f \cdot w$  auf ein Intervall  $I$  in  $\mathbb{Z}$  beschränken, das den Träger von  $f \cdot w$  enthält und dann die diskrete Fouriertransformierte von  $f \cdot w|_I$  berechnen. Besteht  $I$  aus  $N$  Punkten, so besteht die diskrete FT auch nur aus  $N$  Werten, die den Werten von  $\widehat{f \cdot w}$  in den Punkten  $\frac{k}{N}$  mit  $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$  des Frequenzbereichs  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  entsprechen. Man erhält also nur eine Abtastung des kontinuierlichen Spektrums  $\widehat{f \cdot w}$ .

Hat man nur diese Abtastwerte vor Augen, so kann man zu katastrophalen Fehlinterpretationen verführt werden! Zwei Artefakte sind zu beachten:

1. Wie schon weiter oben bemerkt, kann das Spektrum von  $\widehat{f \cdot w}$  eine kontinuierliche Frequenzverteilung haben, obwohl  $f$  periodisch ist, z.B. eine reine Sinusschwingung ist.
2. Stimmt  $N$  nicht mit einem ganzzahligen Vielfachen der Periode von  $f$  überein, so erfolgt die Abtastung von  $\widehat{f \cdot w}$  infolge der DFT nicht in Maxima oder Minima der Keulen von  $\widehat{w}$ . Dadurch kann es passieren, dass selbst bei Vorliegen einer reinen Sinusschwingung  $f$  das abgetastete Spektrum von  $\widehat{f \cdot w}$  vorgaukelt, dass in dem Signal viele Frequenzanteile beteiligt seien; das ist der sogenannte *Lattenzauneffekt* oder *picket fence effect*. Dies ist recht tückisch, wenn man die in  $f$  vorhandenen Frequenzanteile schätzen will. Beim Einsatz von Fenstern und DFT für die Spektralanalyse sollte man also immer sehr genau die Gegebenheiten bedenken.



Aliaseffekte beim Abtasten des Spektrums einer gefensterten Sinusschwingung

## 9.2 Die gleitende DFT

### 9.2.1 Definition

Es seien  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ein diskretes Signal und  $N \in \mathbb{N}$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  definieren wir die *gleitende z-Transformierte* von  $f$  als

$$\Phi(f, n, z) := \sum_{j=0}^{N-1} f(n-j)z^{-j}$$

Die Abbildung  $f \mapsto \Phi(f, n, z)$  heißt *die gleitende z-Transformation* der Länge  $N$ .

Setzt man  $z = e^{2\pi ik}$ , so erhält man die  $k$ -te Komponente der *gleitenden DFT* der Länge  $N$  zum Zeitpunkt  $n$

$$\Psi_k(n) := \Phi(f, n, e^{-\frac{2\pi ik}{N}}) = \sum_{j=0}^{N-1} f(n-j)e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}$$

Man betrachtet also zu jedem Zeitpunkt  $n$  nur die letztvergangenen  $N$  Signalwerte  $f(n), \dots, f(n-N+1)$  und berechnet davon die  $z$ -Transformierte bzw. die diskrete FT.



Komponenten ist aber nach wie vor quadratisch. Ein Vorteil gegenüber der FFT ergibt sich aber dann, wenn man nur wenige Komponenten der DFT berechnen will (in etwa weniger als  $\log_2 N$ ). Die FFT berechnet, ob man will oder nicht, immer alle. Daher wird der Goertzel-Algorithmus gern eingesetzt für gleitende Spektralanalysen von wenigen Frequenzkomponenten. So eine Situation trifft man z.B. bei Modems an, wenn man Informationen mit einigen wenigen Tönen übertragen will, oder bei Decodern von den DTMF-Tönen, die zur Übertragung von Ziffern beim Telefon verwendet werden.

### 9.3 Beschreibung von Filtern mit der gleitenden DFT

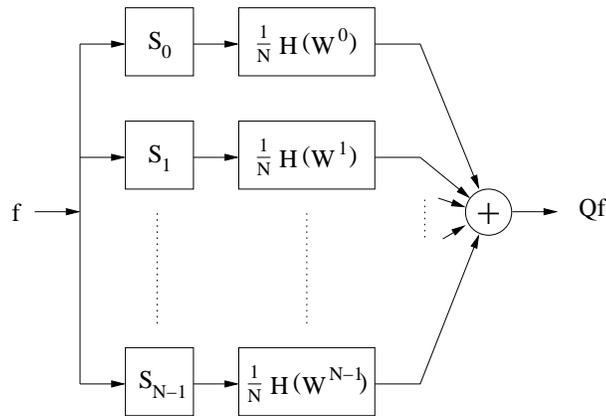
**9.3.1 Satz:**  $Q$  sei ein FIR-Filter mit Impulsantwort  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , die außerhalb von  $\{0, \dots, N-1\}$  verschwinde.  $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$  sei die Systemfunktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} Qf(n) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(f, n, W^{-j})H(W^j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_j(n)H(e^{\frac{2\pi ij}{N}}) \end{aligned}$$

**Beweis:** Mit Hilfe der Umkehrformel 9.2.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} Qf(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)h(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(f, n, W^{-j})W^{-jk}h(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Phi(f, n, W^{-j})H(W^j) \end{aligned}$$

**9.3.2 Fazit:** Verwendet man, dass  $\Phi(f, n, W^{-j})$  gemäß 9.2.4 das Ausgangssignal eines Filters  $Q_j$  mit Systemfunktion  $S_j$  ist, so erhält man  $Q$ , indem man hinter  $Q_j$  einen Multiplizierer mit  $\frac{1}{N}H(W^j)$  schaltet und die Resultate summiert.



Daraus folgt, dass man die Systemfunktion von  $Q$  auch in der Gestalt  $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} S_j(z)H(W^j)$  schreiben kann. Somit haben wir  $Q$  durch  $N$  parallel geschaltete, rekursive Filter realisiert.

### 9.4 Blockweise gleitende DFT

Die praktischen Verwendung der gleitenden DFT stößt auf zwei Probleme:

1. Verwendet man eine Fensterfunktion, so gilt die rekursive Darstellung 9.2.4 nicht mehr.
2. Zu jedem Zeitpunkt  $n$  erfordert die Berechnung der Werte aller  $N$  Komponenten der gleitenden DFT einen Aufwand in Größenordnung von  $N$ . Bei hohen Abtastraten kann das zu Rechnerbelastungen führen, die keine Echtzeitberechnung mehr erlauben.

In etlichen Anwendungen ist es jedoch gar nicht nötig, die Berechnung zu jedem Zeitpunkt vorzunehmen, weil sich die DFT-Werte von einem Zeitpunkt zum nächsten nur wenig ändern. So genügt es z.B. für eine gleitende Spektralanalyse meist, wenn man in etwas größeren Zeitabständen die DFT der zurückliegenden  $N$  Signalwerte berechnet und dafür den FFT-Algorithmus verwendet.

Im einfachsten Fall wählt man ein  $a \in \mathbb{N}$  und berechnet zu jedem Zeitpunkt  $ma$  mit Hilfe der FFT die DFT des Signals  $f|_{I_m}$  in dem Intervall  $I_m = \{ma, \dots, ma - N + 1\}$ . Ist  $a$  klein, so ist der Rechenaufwand hoch. Je größer  $a$  wird, desto mehr muss man damit rechnen, dass die DFT-Werte zum Zeitpunkt  $ma$  sich stark von denen zum Zeitpunkt  $(m+1)a$  unterscheiden, insbesondere wenn  $a$  deutlich größer als die Intervalllänge  $N$  ist. Meist lässt man die Intervalle  $I_m$  aneinander grenzen (also  $a = N$ ) oder sich sogar überlappen.

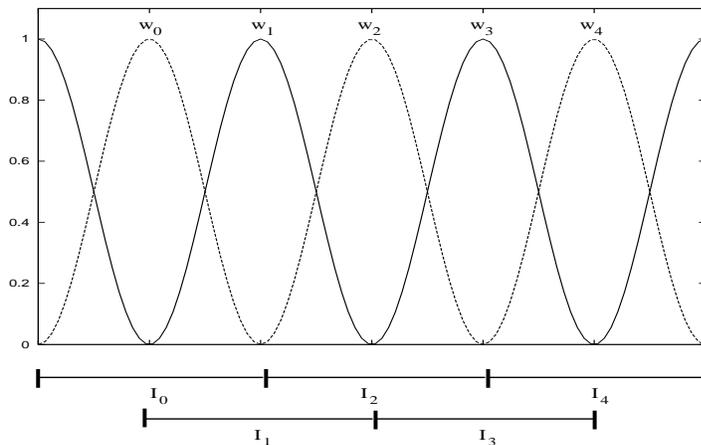
Solange man keine Fensterfunktion verwendet (d.h. nur das Rechteckfenster), kann man aus den Fouriertransformierten der Signalstücke  $f|_{I_m}$  das Signal  $f$  wieder berechnen. Setzt man jedoch Fensterfunktionen ein, so geht das i.A. nicht mehr.

Eine Möglichkeit gibt es aber doch:

- Wähle die Intervalle  $I_m$  überlappend, d.h.  $I_m$  soll mit  $I_{m-1}$  und  $I_{m+1}$  (und nur mit denen) jeweils nicht-leeren Durchschnitt haben.
- Wähle Fensterfunktionen  $w_m$ , deren Träger in  $I_m$  liegen und die eine Partition der Eins bilden, d.h. dass  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} w_m(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{Z}$ .

Jedes Signalstück  $f_m := (w_m \cdot f)|_{I_m}$  kann aus seiner DFT mit der Umkehrformel wieder errechnet werden. Setzt man es durch 0 auf ganz  $\mathbb{Z}$  fort, so ergibt sich  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (w_m \cdot f)(t) = f(t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} w_m(t) = f(t)$ .

In der praktischen Anwendung kann man für  $w_m$  eine halbe Periode einer  $\cos^2$ -Funktion wählen, die so gestaucht und verschoben wird, dass sie in der Mitte von  $I_m$  den Wert 1 und in den Endpunkten den Wert 0 hat. Überlappen sich benachbarte Intervalle um die Hälfte ihrer Länge, so sind die entsprechenden Fensterfunktionen um  $90^\circ$  gegenüber  $w_m$  verschoben, entsprechen somit  $\sin^2$ -Funktionen. Und wegen  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  bilden diese Fensterfunktionen eine Partition der Eins.



Nach Verarbeitung der einzelnen Signalstücke  $f_m$  kann man durch Addieren wieder ein Signal auf ganz  $\mathbb{Z}$  generieren. Schneidet man z.B. aus dem Spektrum jedes Signalstücks  $f_m$  einen gewissen Frequenzbereich aus, so erhält man durch Rücktransformieren und Aufaddieren ein Filter mit entsprechender Bandpasscharakteristik. Sehr gut kann man damit auch Verschiebungen von Audiosignalen in der Tonhöhe realisieren; man muss dafür nur das Spektrum jedes Signalstücks  $f_m$  entsprechend verschieben.

Man kann auf diese Weise zeitlich variable Filteroperationen im Frequenzbereich realisieren, die von der bisher betrachteten Theorie nicht erfasst werden.

# Kapitel 10

## Kontinuierliche Signale und Systeme

### 10.1 Funktionen als Signale

Kontinuierliche Signale modelliert man als Funktionen von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ . Für mathematische Untersuchungen fordert man zusätzliche Eigenschaften und beschränkt sich auf Untervektorräume mit schönen Zusatzstrukturen, die allerdings nicht immer alle Signale enthalten, mit denen man rechnen möchte. Einige davon seien hier genannt.

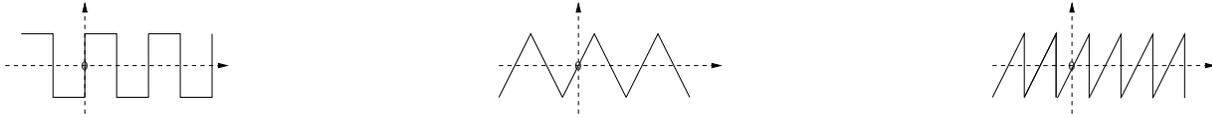
#### 10.1.1 Einige Räume kontinuierlicher Signale

- a) Der Raum  $\mathcal{K}(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit kompaktem Träger  $\overline{\{t \in \mathbb{R}: f(t) \neq 0\}}$ .  
 $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|: t \in \mathbb{R}\}$  ist eine Norm auf diesem Raum.
- b) Der Raum  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die bei Unendlich verschwinden.  
 $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|: t \in \mathbb{R}\}$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
- c) Der Raum  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  der stetigen beschränkten Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
 $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|: t \in \mathbb{R}\}$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
- d) Der Raum  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- e) Der Raum  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$  der  $r$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und der Raum  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen.
- f) Der Raum  $L_1(\mathbb{R})$  der meßbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ .  
 $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
- g) Der Raum  $L_2(\mathbb{R})$  der meßbaren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ .  
 $\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$  ist eine Norm, mit der dieser Raum vollständig ist. Weil die Norm von einem Skalarprodukt herkommt, ist  $L_2(\mathbb{R})$  sogar ein Hilbertraum.  
Anschaulich sind die Signale in  $L_2(\mathbb{R})$  diejenigen, die endliche Energie haben.

**10.1.2 Bemerkung** Eigentlich sind die Elemente der Räume  $L_1(\mathbb{R})$  und  $L_2(\mathbb{R})$  nicht Funktionen, sondern die Äquivalenzklassen, die sich ergeben, wenn man Funktionen, die sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden, als äquivalent erklärt. Es ist jedoch allgemein üblich, die Sprechweisen so zu wählen, als ob die Repräsentanten der Äquivalenzklassen die Elemente der Räume  $L_1(\mathbb{R})$  und  $L_2(\mathbb{R})$  wären.

#### 10.1.3 Beispiele für kontinuierliche Signale

- a) **Periodische Signale**  
Harmonische Schwingungen  $e^{2\pi i\nu t}, \cos 2\pi\nu t, \sin 2\pi\nu t$   
Rechteckschwingungen, Dreieckschwingungen, Sägezahnschwingungen



Achtung! Periodische Funktionen sind nicht in  $L_1(\mathbb{R})$  oder  $L_2(\mathbb{R})$  (außer der Nullfunktion).

b) Die **Gaußfunktion**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

c) **Fensterfunktionen**

Das sind Funktionen mit kompaktem Träger, die nichtnegativ und gerade sind. Die einfachste Fensterfunktion ist die charakteristische Funktion eines zu 0 symmetrischen Intervalls.

$$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fensterfunktionen werden benutzt, um aus einem periodischen Signal  $f$  ein Stück endlicher Dauer herauszuschneiden. Im einfachsten Fall multipliziert man  $f$  mit  $\text{rect}_a$ ; dadurch werden die Signalwerte außerhalb des Intervalls  $[-a, a]$  auf Null gesetzt und die in dem Intervall beibehalten. Wie wir später sehen werden, kann dieses Vorgehen zu unerwünschten Effekten führen. Diese lassen sich mildern, wenn man die harte Rechteckfunktion durch Fensterfunktionen ersetzt, die an den Intervallgrenzen sanfter ansteigen. Ein linearer Anstieg führt zu trapezförmigen Fensterfunktionen, im Grenzfall zur Dreiecksfunktion

$$\text{trian}_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Häufig macht man die Rampen sogar differenzierbar z.B. indem man Stücke von  $\cos$  ausschneidet und geeignet verschiebt.

d) Die **Heaviside-** oder Sprungfunktion

$$\text{step}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 10.1.4 Verschiebung und Spiegelung

Wie im diskreten Fall definiert man den Verschiebungsoperator  $\tau_s$  durch  $\tau_s f(t) = f(t - s)$  und die Spiegelung eines Signals  $f$  als  $f_-(t) = f(-t)$ .

## 10.2 Die Faltung

**10.2.1 Definition** Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  meßbare Funktionen und existiert  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds$  für Lebesgue-fast alle  $t \in \mathbb{R}$ , so heißt die fast überall definierte Funktion

$$f \star g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds$$

die *Faltung* von  $f$  mit  $g$ .

### 10.2.2 Satz

a) Sind  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , so sind  $f \star g$  und  $g \star f$  in  $L_1(\mathbb{R})$ , und es gilt

$$f \star g = g \star f \quad \text{fast überall}$$

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

b) Für  $f, g, h \in L_1(\mathbb{R})$  gilt

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= (f \star g) \star h \\ (f + g) \star h &= f \star h + g \star h \end{aligned}$$

Mit der Faltung als Multiplikation ist  $L_1(\mathbb{R})$  eine Banachalgebra.

### 10.2.3 Mathematische Probleme

#### 1. Auf $\mathbb{R}$ sind Dirac-Impulse keine Funktionen

Es gibt einen wesentlichen Unterschied zur diskreten Faltung. Während es ein spezielles diskretes Signal, den Dirac-Impuls  $\delta_0 \in L_1(\mathbb{Z})$ , gibt, der die Eigenschaft hat, daß  $f \star \delta_0 = f$  für jedes  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  gilt, existiert ein entsprechendes kontinuierliches Signal nicht. Denn es gibt keine Funktion  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , so daß  $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(s)ds = f(0)$  für alle  $f \in L_1(\mathbb{R})$  gilt. Man kann sich überlegen, daß eine solche Funktion außerhalb des Nullpunktes verschwinden müßte, also fast überall Null wäre. Somit wäre das Integral im Widerspruch zur Annahme stets Null.

2. Der Beweis, daß jede lineare, translationsinvariante, stetige Abbildung  $L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z})$  ein Faltungsoperator ist, funktioniert für  $L_1(\mathbb{R})$  nicht.

3. Es gibt keinen Funktionenraum, der alle interessanten Signale enthält und auf dem die Faltung uneingeschränkt definiert werden kann.

## 10.3 Dirac-Impulse

Anschaulich fordert man von einem idealisierter Einheitsimpuls  $\delta_{t_0}$ , daß er lediglich bei dem Zeitpunkt  $t_0$  eine infinitesimal kurze Zeitspanne lang ungleich Null ist und daß für jede Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{t_0}(t) dt = f(t_0)$$

Zwar gibt es keine Funktion, die so etwas erfüllt, aber es gibt ein anderes mathematisches Objekt, nämlich ein Maß  $\delta_{t_0}$ . Für jede Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}$  setzt man

$$\delta_{t_0}(B) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_0 \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Maß heißt das *Dirac-Maß* im Punkt  $t_0$  oder in der Signalverarbeitung der *Dirac-Einheitsimpuls* im Punkt  $t_0$ . Es hat seine gesamte Masse in dem Punkt  $t_0$ , und integriert man  $f$  bezüglich dieses Maßes, so erhält man gerade die gewünschte Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\delta_{t_0}(t) = f(t_0)$$

Mit  $a\delta_{t_0}$  werde das (komplexwertige) Maß bezeichnet, das statt der Masse 1 die Masse  $a \in \mathbb{C}$  im Punkt  $t_0$  plziert.

Statt der obigen mathematischen Schreibweise verwendet man oft folgende suggestive Schreibweisen, bei denen das Diracmaß wie eine Funktion behandelt wird.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \delta_{t_0}(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a \delta_0(t - t_0) f(t) dt = a f(t_0)$$

**10.3.1 Definition** Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man

a)  $f \cdot \delta_{t_0} = f(t_0) \cdot \delta_{t_0}$

b)  $\tau_{t_1} \delta_{t_2} = \delta_{t_1+t_2}$

c)  $f \star \delta_{t_0} = \delta_{t_0} \star f = \tau_{t_0} f$ . Es gilt also  $f \star \delta_{t_0}(t) = \delta_{t_0} \star f(t) = f(t - t_0)$ .

$$\text{d) } \delta_{t_1} \star \delta_{t_2} = \delta_{t_1+t_2}$$

Prüfen Sie nach, daß sich genau diese Regeln ergeben, wenn man das Diracmaß formal wie eine Funktion behandelt und rezeptartig die entsprechenden Definitionen für Funktionen anwendet.

Man kann nun Signale als endliche Linearkombinationen von Funktionen und Diracmaßen modellieren und die bisher betrachteten linearen Operationen wie die Faltung, Multiplikation und Verschiebung linear darauf fortsetzen. Leider reicht dies noch nicht für eine mathematisch befriedigende Darstellung aus.

## 10.4 Impulsfolgen und diskrete Signale

### 10.4.1 Impulsfolgen

Eine Signal, das aus äquidistanten Einzelimpulsen besteht, nennt man *Impulsfolge*. Rein formal wird es geschrieben als

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT+\alpha}$$

wobei  $T > 0$  der Impulsabstand,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine Folge komplexer Zahlen sind. Sind alle Koeffizienten  $a_k$  gleich oder sogar 1, so nennt man das Signal einen *Impulskamm* bzw. einen *Einheitsimpulskamm*. Der Einfachheit halber werden wir im Folgenden  $\alpha$  weglassen bzw. gleich 0 setzen.

**Bezeichnung:**  $\text{comb}_T := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$

Es bleibt die Frage, was diese formale unendliche Summe mathematisch bedeuten soll. Einen präzisen Sinn kann man ihr geben, wenn man sie als Radon-Maß oder als Distribution auffaßt, indem man für Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit kompaktem Träger definiert

$$\int f(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT}(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f(kT)$$

Wegen des kompakten Trägers sind in der Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null.

Genauer wollen wir hier auf die mathematischen Einzelheiten nicht eingehen. Wir begnügen uns damit, die für uns interessanten Operationen rezeptartig zu definieren. Das sind die Verschiebung sowie die Multiplikation und die Faltung mit Funktionen oder einzelnen Diracimpulsen.

Wir setzen

$$\tau_{t_0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \tau_{t_0} \delta_{kT}$$

und

$$\delta_{t_0} \star \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{t_0} \star \delta_{kT}$$

sowie für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f(kT) \delta_{kT}$$

und

$$\begin{aligned} f \star \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f \star \delta_{kT} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \tau_{kT} f \end{aligned}$$

sofern die Summe auf der rechten Seite in einem vernünftigen Sinne konvergiert. Dies läßt sich mathematisch präzisieren, indem man die Terme als Distributionen auffaßt. Für die meisten Anwendungen reicht es aber aus, nur spezielle Signale  $f$  zu betrachten, bei denen die Konvergenz der rechten Seite unproblematisch ist. Der wichtigste Spezialfall ist folgender.

### 10.4.2 Faltung von Impulsfolgen mit Funktionen beschränkten Trägers

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit beschränktem Träger und ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT}(t)$  eine Impulsfolge, so ist

$$\begin{aligned} f \star \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f \star \delta_{kT} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \tau_{kT} f \end{aligned}$$

punktweise konvergent gegen eine Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Denn in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  sind nur endlich viele der Funktionen  $\tau_{kT} f$  von Null verschieden, weil sie durch Verschiebung um  $kT$  aus  $f$  entstehen, welches beschränkten Träger hat.

### 10.4.3 Diskrete Signale als Impulsfolgen

Ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT}$  eine Impulsfolge, so ist  $f_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k \mapsto a_k$  ein diskretes Signal. Dem diskreten Signal sieht man die Abtastfrequenz nicht mehr an, während sie in der Impulsfolge explizit vorhanden ist. Deshalb eignen sich Impulsfolgen etwas besser dafür, mathematisch zu untersuchen, was beim Übergang von kontinuierlichen zu diskreten Signalen und zurück passiert.

### 10.4.4 Die Abtastung als Multiplikation mit einem Impulskamm

Die Abtastung eines Signals  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Schrittweite  $T > 0$  kann man als Multiplikation von  $f$  mit einem Impulskamm  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} T \delta_{kT}$  beschreiben, nämlich

$$f \mapsto T \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \delta_{kT}$$

Der Faktor  $T$  dient dazu, die  $L_1$ -Norm des diskreten Signals

$$f_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad k \mapsto T f(kT)$$

annähernd gleich der  $L_1$ -Norm von  $f$  zu machen; denn  $\|f_d\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T f(kT)$  ist eine uneigentliche Riemannsche Summe für  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1$ . Die Wirkung von  $f$  während eines Zeitintervalls  $[kT, (k+1)T[$  wird annähernd in die Masse eines Impulses zum Zeitpunkt  $kT$  gesteckt. Will man mit diskreten Signalen bei unterschiedlichen Abtastfrequenzen arbeiten oder will man von diskreten Signalen wieder zu kontinuierlichen Signalen zurückkommen, so muß man diesen Faktor berücksichtigen; ansonsten könnte man ihn auch weglassen.

## 10.5 Temperierte Funktionen

**10.5.1 Definition** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *temperiert* oder *schnell fallend*, wenn sie unendlich oft stetig differenzierbar ist und wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  und jedes Polynom  $P$  die Funktion  $P \cdot D^n f$  beschränkt ist, wobei  $D^n f = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$  die  $n$ -te Ableitung von  $f$  ist ( $D^0 f = f$ ).

**Beispiel:** Mit der Hospitalschen Regel folgt, daß die Gaußsche Funktion temperiert ist.

Der Raum der temperierten Funktionen wird mit  $\mathcal{S}$  bezeichnet (zu Ehren von Laurent Schwartz, dem Erfinder der Distributionen). Er ist ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

Für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  ist

$$p_k(f) = \sup_{m \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^k |D^m f(x)|$$

eine Norm auf  $\mathcal{S}$ . Es gilt

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : p_k(f) < \infty \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}\}.$$

Man versieht  $\mathcal{S}$  mit der größten Topologie, bezüglich der alle  $p_k$  stetig sind. Damit wird  $\mathcal{S}$  ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum, der metrisierbar ist z.B. durch die Metrik

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \min\{1, p_k(f - g)\} \cdot 2^{-k}.$$

Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von temperierten Funktionen konvergiert genau dann gegen ein  $f \in \mathcal{S}$ , wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(f - f_n) = 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Der Raum  $\mathcal{S}$  enthält zwar bei weitem nicht alle interessanten Signale, er hat aber viele schöne mathematische Eigenschaften und dient deshalb als Basis zur Konstruktion eines Raumes von allgemeineren Signalen.

### 10.5.2 Satz

- a)  $\mathcal{S}$  ist vollständig, also ein Frechetraum.
- b)  $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f \text{ hat kompakten Träger}\}$  ist dicht in  $\mathcal{S}$ .
- c) Die Inklusion  $\mathcal{S} \rightarrow L_1(\mathbb{R})$  ist stetig.
- d) Für jedes  $f \in \mathcal{S}$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist  $D^n f \in \mathcal{S}$ , und die Abbildung  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto D^n f$  ist stetig.
- e) Für jedes Polynom  $P$  und jedes  $f \in \mathcal{S}$  ist  $P \cdot f \in \mathcal{S}$ .
- f) Für alle  $f, g \in \mathcal{S}$  ist  $f \cdot g \in \mathcal{S}$ .
- g) Für alle  $f, g \in \mathcal{S}$  ist  $f \star g \in \mathcal{S}$ .

**Beweis:** Siehe z.B. W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill.

## 10.6 Temperierte Distributionen

**10.6.1 Definition** Eine *temperierte Distribution* ist eine stetige Linearform auf  $\mathcal{S}$ , also eine stetige, lineare Abbildung  $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Zur Erinnerung:* Die Stetigkeit linearer Abbildungen in lokalkonvexen Räumen kann man auch über die Beschränktheit auf den Kugeln der definierenden Halbnormen charakterisieren: Eine lineare Abbildung  $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig, wenn gilt

$$\text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ und ein } c > 0, \text{ so daß } |u(\varphi)| \leq c p_m(\varphi) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Der Raum der stetigen, linearen Abbildungen von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathbb{C}$ , wird als der Raum  $\mathcal{S}'$  der temperierten Distributionen bezeichnet. Man versieht  $\mathcal{S}'$  mit der Topologie  $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$  der punktweisen Konvergenz; das ist die größte Topologie, derart daß alle Abbildungen  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto u(\varphi)$  mit  $\varphi \in \mathcal{S}$  stetig sind. Eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{S}'$  konvergiert genau dann gegen ein  $u \in \mathcal{S}'$ , wenn für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$  die Zahlenfolge  $(u_n(\varphi))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $u(\varphi)$  konvergiert.

Die Funktionen in  $\mathcal{S}$  nennt man auch *Testfunktionen*, weil die Distributionen auf ihnen 'getestet' d.h. ausgewertet werden.

Die Bedeutung des Raumes  $\mathcal{S}'$  liegt darin, daß allen interessanten Signalen auf kanonische Weise eine temperierte Distribution zugeordnet werden kann und daß die Differentiation und andere wichtige Operationen auf  $\mathcal{S}'$  so definiert werden können, daß die klassischen Definitionen eingeschlossen sind.

**Bemerkung** In anderem Zusammenhang wählt man oft statt  $\mathcal{S}$  einen kleineren Raum, nämlich den Raum  $\mathcal{D}$  der  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger, als den Raum der Testfunktionen, konstruiert darauf eine geeignete Topologie und definiert den Distributionenraum  $\mathcal{D}'$  entsprechend als Raum der stetigen Linearformen auf  $\mathcal{D}$ . Wegen des kompakten Trägers dieser Testfunktionen erzeugt dann jede meßbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  eine Distribution. Für viele Zwecke ist dies recht nützlich; für die Signalverarbeitung hat der Raum  $\mathcal{S}'$  jedoch einen entscheidenden Vorteil: Auf ihm läßt sich die die Fouriertransformation als ein Automorphismus definieren.

### 10.6.2 Beispiele für temperierte Distributionen

#### 10.6.2.1 Reguläre Distributionen

Eine Distribution  $u \in \mathcal{S}'$  heißt *regulär*, wenn es eine meßbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so daß

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Wir schreiben für so ein  $u$  oft  $u_f$  und sagen,  $f$  erzeuge  $u$ . Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, schreibt man oft auch einfach  $f$  statt  $u_f$ .

Jede höchstens polynomial wachsende, meßbare Funktion sowie jede Funktion in  $L_1(\mathbb{R})$  erzeugt eine temperierte Distribution.

### 10.6.2.2 Diracimpulse

Jeder Diracimpuls  $\delta_x$  läßt sich als Distribution  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(x)$  auffassen.

Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine Folge komplexer Zahlen, die höchstens polynomial wächst, so kann man auch die Impulsfolge  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{kT}$  als Distribution  $u$  mit  $u(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(kT)$  auffassen. Insbesondere der Einheitsimpulskamm  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$  ist die Distribution  $\text{comb}_T$ , die definiert ist durch

$$\text{comb}_T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(kT).$$

Weil jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$  schnell fallend ist, konvergiert die Reihe absolut.

### 10.6.3 Einige Operationen auf $\mathcal{S}'$

Mathematische Operationen wie die Verschiebung, Ableitung und Faltung werden auf  $\mathcal{S}'$  dadurch definiert, daß man sie auf die Testfunktion im Argument schiebt.

#### 10.6.3.1 Die Verschiebung

Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $u \in \mathcal{S}'$  definiert man  $\tau_x u \in \mathcal{S}'$  durch

$$\tau_x u(\varphi) = u(\tau_{-x} \varphi) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Das Minuszeichen ist nötig, damit  $\tau_x u$  von  $\tau_x f$  erzeugt wird, wenn  $u$  eine reguläre Distribution ist, die von  $f$  erzeugt wird. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \tau_x(u_f)(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tau_{-x} \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t+x) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s-x) \varphi(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_x f(s) \varphi(s) ds \\ &= u_{\tau_x f}(\varphi) \end{aligned}$$

#### 10.6.3.2 Die Ableitung

Für  $u \in \mathcal{S}'$  definiert man  $Du$  durch

$$Du(\varphi) = -u(D\varphi) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Wiederum dient das Minuszeichen dazu, daß  $Du$  von  $Df$  erzeugt wird, wenn  $u$  von einer stetig differenzierbaren, höchstens polynomial wachsenden Funktion  $f$  erzeugt wird; denn es gilt

$$\begin{aligned} Du_f(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (D\varphi(t)) dt \\ &= [-f(t) \varphi(t)]_{t=-\infty}^{t=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} Df(t) \varphi(t) dt \quad (\text{partielle Integration!}) \\ &= u_{Df}(\varphi) \end{aligned}$$

weil die Randterme der partiellen Integration verschwinden.

**Beispiele**

- a) Die Ableitung der Heavisidefunktion  $\text{step}_x$  ist der Diracimpuls  $\delta_x$ .  
Denn für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$  gilt

$$\begin{aligned} Du_{\text{step}_x}(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \text{step}_x(t) D\varphi(t) dt \\ &= - \int_x^{\infty} D\varphi(t) dt \\ &= \varphi(x) \\ &= \delta_x(\varphi) \end{aligned}$$

- b) Die Ableitung des Diracimpulses  $\delta_x$  ist die Distribution

$$\varphi \mapsto -\varphi'(x) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Denn es gilt  $D\delta_x(\varphi) = -\delta_x(\varphi') = -\varphi'(x)$

**10.6.3.3 Die Faltung**

Die Faltung von Distributionen läßt sich nicht uneingeschränkt (auf vernünftige Weise) definieren. Untersuchungen dazu wurden schon von Laurent Schwartz angestellt in seinem berühmten Buch *Théorie des distributions*. Für die Signalverarbeitung sind die folgende Spezialfälle wichtig (und meist ausreichend).

**10.6.3.3.1 Faltung regulärer Distributionen**

Sind  $u_f$  und  $u_g$  reguläre Distributionen, die von den Funktionen  $f$  und  $g$  erzeugt werden und existiert  $f \star g$ , so ist  $u_f \star u_g$  eine reguläre Distribution, die von  $f \star g$  erzeugt wird.

**10.6.3.3.2 Faltung mit einer temperierten Funktion**

Für jedes  $u \in \mathcal{S}'$  und jedes  $f \in \mathcal{S}$  ist  $x \mapsto u(\tau_x f_-)$  eine Funktion in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , die höchstens polynomial wächst. Sie erzeugt also eine temperierte Distribution, die man mit  $u \star f$  bezeichnet. Man setzt  $f \star u := u \star f$ .

**10.6.3.3.3 Faltung mit einem Diracimpuls**

Für  $u \in \mathcal{S}'$  sei  $u \star \delta_x = \delta_x \star u = u \circ \tau_{-x}$ , also

$$u \star \delta_x(\varphi) = \delta_x \star u(\varphi) = u(\tau_{-x}\varphi) = \tau_x u.$$

Wird  $u$  von einer Funktion  $f$  erzeugt, so wird  $u \star \delta_x$  von  $\tau_x f$  erzeugt.

**10.6.4 Rechenregeln**

Wie auch immer man die Faltung auf möglichst vielen Distributionen definiert, man tut es so, daß dieselben Rechenregeln wie für die Faltung in  $\mathcal{S}$  oder  $L_1(\mathbb{R})$  gelten. Insbesondere gilt für  $u, v, w \in \mathcal{S}'$ , sofern alle Terme definiert sind,

$$\begin{aligned} (u \star v) \star w &= u \star (v \star w) \\ u \star (v + w) &= (u \star v) + (u \star w) \\ D^n(u \star v) &= (D^n u) \star v \end{aligned}$$

**10.6.4.1 Das Produkt**

Auch das Produkt von Distributionen läßt sich nicht uneingeschränkt so definieren, daß alle üblichen Rechenregeln gelten. Für reguläre Distributionen und Diracimpulse greift man einfach auf die Multiplikation der erzeugenden Funktionen und Diracmaße zurück. Es gelten die üblichen Rechenregeln.

## 10.7 Kontinuierliche Systeme

Alle interessanten Signale lassen sich als temperierte Distributionen modellieren, und der Raum  $\mathcal{S}'$  der temperierten Distributionen hat darüber hinaus auch angenehme mathematische Eigenschaften; insbesondere läßt sich die Fouriertransformation als Automorphismus von  $\mathcal{S}'$  definieren, wie wir weiter unten sehen werden. Deshalb ist es naheliegend,  $\mathcal{S}'$  oder Teilräume davon als Definitionsbereich von kontinuierlichen Systemen zu wählen.

**10.7.1 Definition** Ein *kontinuierliches System* ist eine Abbildung  $Q: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}'$ , wobei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{S}'$  gelte.

Die Eigenschaften *linear, translationsinvariant, ohne Gedächtnis, kausal, stabil* definiert man für kontinuierliche Systeme völlig analog zum diskreten Fall.

Der Beweis, daß eine Abbildung  $L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z})$  genau dann linear, translationsinvariant und stetig ist, wenn sie ein Faltungsoperator ist, funktioniert im Kontinuierlichen nicht. Denn die Funktionen aus  $L_1(\mathbb{R})$ , die in genau einem Punkt 1 und sonst 0 sind, repräsentieren die Null in  $L_1(\mathbb{R})$  und bilden keine Schauderbasis. Und die Diracmaße sind keine Funktionen und liegen somit nicht in  $L_1(\mathbb{R})$ .

Man kann jedoch eine andere, aber ähnliche Aussage beweisen. Dazu führt man auf  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  die Halbnormen

$$q_k(f) = \sup\{|D^m f(x)| : 0 \leq m \leq k, |x| \leq k\}$$

und die Metrik

$$d(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \min\{1, q_k(f - g)\} \cdot 2^{-k}$$

ein.  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  wird damit ein vollständiger, metrisierbarer, lokalkonvexer Vektorraum, also ein Frechetraum.

**10.7.2 Satz** Eine Abbildung  $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  ist genau dann linear, translationsinvariant und stetig, wenn es eine Distribution  $h \in \mathcal{S}'$  gibt, sodaß

$$Q(f) = h \star f \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{S}$$

gilt.  $h$  ist durch  $Q$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:**

*Von links nach rechts:* Setze  $h(f) = Q(f_-)(0)$  für jedes  $f \in \mathcal{S}$ . Dann ist  $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  eine lineare Abbildung. Weil  $Q$  und die Abbildungen  $f \mapsto f_-$  und  $f \mapsto f(0)$  stetig sind, ist  $h$  auch stetig.  $h$  ist somit in  $\mathcal{S}'$ . Und für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} Qf(x) &= \tau_{-x}(Qf)(0) \\ &= Q(\tau_{-x}f)(0) \quad \text{wegen der Translationsinvarianz von } Q \\ &= h((\tau_x f)_-) \quad \text{gemäß der Definition von } h \\ &= h \star f(x) \end{aligned}$$

*Von rechts nach links:* Die Linearität ist offensichtlich. Die Translationsinvarianz sieht man so:

$$\tau_y \circ Qf(x) = \tau_y(h \star f)(x) = (h \star f)(x - y) = h(\tau_{x-y}(f_-)) = h(\star \tau_y f(x))$$

Die Stetigkeit beweist man mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen aus der Funktionalanalysis.

*Eindeutigkeit von  $h$ :* Gilt auch  $Qf = u \star f$  für alle  $f \in \mathcal{S}$ , so ist  $0 = (h - u) \star f(0) = (h - u)(f_-)$  für jedes  $f \in \mathcal{S}$  und deshalb  $h = u$ . q.e.d.

Dieser Satz motiviert die folgende Definition.

**10.7.3 Definition** Eine Abbildung  $Q: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}'$  heißt ein *kontinuierliches LTI-System* oder *analoges lineares Filter*, wenn es ein  $h \in \mathcal{S}'$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- a)  $\mathcal{I} = \{u \in \mathcal{S}' : h \star u \text{ existiert}\}$
- b) Für jedes  $u \in \mathcal{I}$  gilt  $Q(u) = h \star u$

Die temperierten Funktionen und die Diracimpulse liegen stets im Definitionsbereich eines kontinuierlichen LTI-Systems  $Q$ . Und es gilt  $Q\delta_0 = h \star \delta_0 = h$ . Deshalb wird  $h$  die *Impulsantwort* des Systems genannt.

#### 10.7.4 Beispiele

a) Die Impulsantwort  $h = \delta_x$  gehört zu dem System  $Qu = \delta_x \star u = \tau_x u$ . Das System bewirkt also lediglich eine Verschiebung um  $x$  und ist auf ganz  $\mathcal{S}'$  definiert. Für  $x = 0$  ist das System die identische Abbildung auf  $\mathcal{S}'$ .

b) Die Abbildung

$$\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', u \mapsto Du$$

ist ein LTI-System  $Q$  mit der Impulsantwort  $h = D\delta_0$ . Denn es gilt  $(D\delta_0) \star u = D(\delta_0 \star u) = Du$ .

c) Die Impulsantwort  $h = \text{step}_0$  erzeugt ein LTI-System  $Q$ , das für jedes  $f \in \mathcal{S}$  als Ausgangssignal  $Qf$  die Stammfunktion

$$Qf(t) = \text{step}_0 \star f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{step}_0(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

hat.

# Kapitel 11

## Die Fouriertransformation kontinuierlicher Signale

### 11.1 Die Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{R})$

(Fourier 1768-1830)

Die klassische Fouriertransformierte einer Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R})$  ist definiert als

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t} \quad \text{für } \nu \in \mathbb{R}.$$

Wir zitieren einige wohlbekanntete Ergebnisse.

#### 11.1.1 Satz

a)  $\hat{f}$  ist eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$ , die für  $|\nu| \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.

b) Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}: L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), f \mapsto \hat{f}$$

ist injektiv. Ist  $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ , so gilt die Umkehrformel

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t} d\nu \quad \text{für Lebesgue-fast alle } t \in \mathbb{R}.$$

c) Für  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  gilt

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

d) Ist  $f \in L_1(\mathbb{R})$  reellwertig, so gilt  $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$  für alle  $\nu \in \mathbb{R}$ .

### 11.2 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}$  ist in  $L_1(\mathbb{R})$  enthalten. Man kann also die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}$  einschränken.

#### 11.2.1 Satz

a) Die Einschränkung der Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{S}$  liefert einen topologischen Automorphismus  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ . Die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, g \mapsto \check{g} \quad \text{mit } \check{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(\nu)e^{2\pi i\nu t} d\nu$$

b) Für jedes  $f \in \mathcal{S}$  gilt

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

c) Für  $f, g \in \mathcal{S}$  gilt

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \text{und} \quad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} \star \hat{g}$$

und

$$\mathcal{F}^{-1}(f \star g) = \check{f} \cdot \check{g} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = \check{f} \star \check{g}$$

d) Für  $f \in \mathcal{S}$  gilt

$$\widehat{Df}(\nu) = 2\pi i \nu \hat{f}(\nu)$$

und für jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  gilt

$$\widehat{P(D)f}(\nu) = P(2\pi i \nu) \hat{f}(\nu)$$

d.h. die Fouriertransformation macht aus einem linearen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten die Multiplikation mit einem Polynom.

**Beweis von d):**

$$\begin{aligned} \widehat{Df}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \\ &= [f(t) e^{-2\pi i \nu t}]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-2\pi i \nu) e^{-2\pi i \nu t} dt \\ &= 0 + 2\pi i \nu \hat{f}(\nu) \end{aligned}$$

### 11.2.2 Parsevalsche Identität

Für  $f, g \in \mathcal{S}$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu$$

## 11.3 Die Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}$  ist dicht in  $L_2(\mathbb{R})$ , und wegen der Parsevalschen Formel ist die Fouriertransformation eine Isometrie bezüglich der  $L_2$ -Norm. Deshalb läßt sie sich von  $\mathcal{S}$  linear und stetig auf ganz  $L_2(\mathbb{R})$  ausdehnen; allerdings läßt sich  $\hat{f}$  nicht für jedes  $f \in L_2(\mathbb{R})$  durch obige Integralformel darstellen.

### 11.3.1 Satz von Plancherel

Die Fouriertransformation läßt sich von  $\mathcal{S}$  eindeutig zu einem Automorphismus

$$L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$$

ausdehnen, der das Skalarprodukt erhält.

## 11.4 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$

Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', \quad u \mapsto \hat{u}$$

wird definiert als die adjungierte Abbildung der Fouriertransformierten  $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ; für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$  gilt also

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$$

Diese Definition setzt die klassische Definition der Fouriertransformation auf  $L_1(\mathbb{R})$  fort; denn für  $f \in L_1(\mathbb{R})$  gilt

$$\begin{aligned}\widehat{u_f}(\varphi) &= u_f(\hat{\varphi}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{\varphi}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) e^{-2\pi its} ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi its} dt ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \hat{f}(s) ds \\ &= u_{\hat{f}}(\varphi)\end{aligned}$$

**Sprechweise:** Sind  $u$  und  $\hat{u}$  reguläre Distributionen, die von den Funktionen  $f$  bzw.  $g$  erzeugt werden, so setzt man  $\hat{f} = g$ .

**11.4.1 Satz** Die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}'$  ist ein topologischer Automorphismus. Die Umkehrabbildung

$$\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', u \mapsto \check{u}$$

wird gegeben durch

$$\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$$

Es gilt  $\hat{\hat{u}} = u_-$ , wobei  $u_-(\varphi) := u(\varphi_-)$  sei.

**11.4.2 Satz** Die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}'$  führt die Faltung in das Produkt über, d.h. wenn für  $u, v \in \mathcal{S}'$  das Faltungsprodukt  $u \star v$  und das Produkt  $\hat{u} \cdot \hat{v}$  existieren, so gilt

$$\widehat{u \star v} = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

## Beispiele

### 11.4.3 Dirac-Impuls

$u = u_{\delta_x}$  sei die Distribution, die von dem Dirac-Maß im Punkt  $x$  erzeugt wird; es gelte also

$$u(\varphi) = \int \varphi(t) d\delta_x(t) = \varphi(x) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}$$

Es folgt

$$\hat{u}(\varphi) = \delta_x(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(x) = \int \varphi(t) e^{-2\pi ixt} dt$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Also ist  $\widehat{u_{\delta_x}}$  eine reguläre Distribution, die von der Funktion  $t \mapsto e^{-2\pi ixt}$  erzeugt wird. Man schreibt kurz  $\widehat{\delta}_x = e^{-2\pi ixt}$ .

### 11.4.4 Ableitung des Dirac-Impulses $\delta_0$

$u = u_{D\delta_0}$  sei die Distribution, die von der Ableitung des Dirac-Impulses im Punkt 0 erzeugt wird; es gelte also

$$u(\varphi) = -\varphi'(0) \text{ für jedes } \varphi \in \mathcal{S}$$

Es folgt

$$\hat{u}(\varphi) = D\delta_0(\hat{\varphi}) = -D\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(t) 2\pi it e^{-2\pi ixt} dt \Big|_{x=0} = \int \varphi(t) 2\pi it dt$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Also ist  $\widehat{u_{D\delta_0}}$  eine reguläre Distribution, die von der Funktion  $t \mapsto 2\pi it$  erzeugt wird.

Man schreibt kurz  $\widehat{D\delta_0} = 2\pi it$ .

### 11.4.5 Endliche Linienspektren

Weil die Fouriertransformation linear ist, folgt

$$\widehat{\sum_{k=0}^n a_k \delta_{x_k}} = \sum_{k=0}^n a_k \widehat{\delta_{x_k}} = \sum_{k=0}^n a_k e^{-2\pi i x_k t}$$

für beliebige  $a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere gilt

$$\frac{1}{2}(\widehat{\delta_\omega + \delta_{-\omega}}) = \cos 2\pi\omega t \quad \text{und} \quad \frac{1}{2i}(-\widehat{\delta_\omega + \delta_{-\omega}}) = \sin 2\pi\omega t$$

und wegen  $\hat{u} = u_-$  gilt (in etwas schlampiger Schreibweise)

$$\widehat{e^{2\pi i \omega t}} = \delta_\omega \quad \text{und} \quad \widehat{\cos 2\pi\omega t} = \frac{1}{2}(\delta_\omega + \delta_{-\omega}) \quad \text{und} \quad \widehat{\sin 2\pi\omega t} = \frac{1}{2i}(\delta_\omega - \delta_{-\omega})$$

### 11.4.6 Impulskämme

**11.4.6.1 Satz** Seien  $T > 0$  und  $\text{comb}_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$ . Dann gilt

$$\widehat{\text{comb}_T} = \frac{1}{T} \text{comb}_{\frac{1}{T}}$$

d.h. für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}$  gilt

$$\widehat{\text{comb}_T}(\varphi) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{T}\right).$$

**Beweis:** Siehe z.B. A.H.Zemanian: *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill 1965, Dover 1987.

Dieser Satz ist der Schlüssel zum Beweis des Shannonschen Abtasttheorems im nächsten Kapitel.

### 11.4.7 Fourierreihen, unendliche Linienspektren

Eine mit Periode  $P > 0$  periodische, lokalintegrierbare Funktion  $f$  kann man als reguläre Distributionen  $u_f$  auffassen und somit ihre Fouriertransformierte  $\widehat{u}_f$  bilden. Man kann zeigen, dass  $\widehat{u}_f$  eine Impulsfolge  $2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{\frac{k2\pi}{P}}$  ist. Man sagt,  $f$  habe ein Linienspektrum. Die Koeffizienten  $a_k$  sind gerade die Koeffizienten der Fourierreihe von  $f$ , also

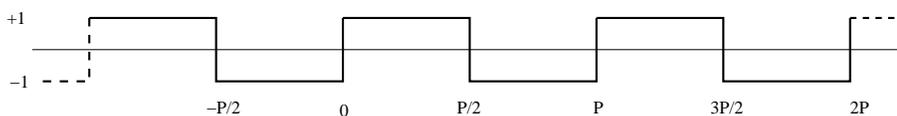
$$a_k = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-\frac{2\pi i}{P} kt} dt$$

#### Beispiel: Linienspektrum einer Rechteckschwingung

Wir betrachten eine Rechteckschwingung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die stückweise definiert ist durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } kP < t < (k + \frac{1}{2})P \\ -1 & \text{für } (k + \frac{1}{2})P < t < (k + 1)P \end{cases}$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Welche Werte  $f$  in den Sprungstellen  $n\frac{P}{2}$  annimmt, spielt keine Rolle, weil sie eine Nullmenge sind.



Die Fourierkoeffizienten  $a_k$  von  $f$  rechnet man leicht aus:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i}{P} kt} dt \\
 &= 2 \frac{1}{P} \int_0^{\frac{P}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i}{P} kt} dt \\
 &= \frac{2}{P} \left[ -\frac{P}{2\pi i k} e^{-\frac{2\pi i}{P} kt} \right]_0^{\frac{P}{2}} \\
 &= \frac{1}{\pi i k} (-e^{-\pi i k} + 1) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\pi i k} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bei einer Rechteckschwingung sind also Anteile beliebig hoher Frequenz beteiligt! Sie hat keine endliche Bandbreite. Häufig schreibt man die Fourierreihe um in eine Entwicklung nach Sinus- und Cosinusfunktionen. Für obige Rechteckschwingung ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{2\pi(2n+1)t}{P}$$

Außerhalb der Sprungstellen konvergiert diese Reihe punktweise gegen  $f$ . Sie konvergiert jedoch recht langsam, weil die Koeffizienten nur linear gegen Null gehen. Und sie konvergiert nicht gleichmäßig; bei den Unstetigkeitsstellen gibt es Überschwinger (siehe Gibbsches Phänomen in 5.1).

## 11.5 Beschreibung kontinuierlicher Systeme im Frequenzbereich

Aufgrund dessen, dass die Fouriertransformation die Faltung in das Produkt überführt, kann man jedes kontinuierliche, lineare System  $Q$  mit Impulsantwort  $h$  im Frequenzbereich darstellen durch

$$\widehat{Qf} = \hat{h} \cdot \hat{f}.$$

Dies ist formal dieselbe Beschreibung wie für diskrete Systeme. Allerdings ist  $\hat{h}$  nicht immer eine Funktion, sondern irgendeine Distribution, die man als Übertragungsdistribution des Systems bezeichnet. Wenn sie nicht regulär ist, d.h. nicht durch eine Funktion erzeugt wird, kann man obige Formel nicht so anschaulich deuten wie im diskreten Fall.

In vielen praktisch relevanten Fällen ist  $\hat{h}$  jedoch regulär, kann also als Funktion aufgefasst werden, oder kann zumindest durch reguläre Distributionen approximiert werden. Der Frequenzbereich von  $\hat{h}$  ist aber nicht mehr ein beschränktes Intervall, sondern ganz  $\mathbb{R}$ . Manchmal ist es umgekehrt, nämlich dass  $\hat{h}$  eine Funktion ist und  $h$  dagegen nicht regulär ist.

Wir wollen zwei Beispiele geben.

### 11.5.1 Differentiator

Der Ableitungsoperator

$$\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', \quad u \mapsto Du$$

ist ein kontinuierliches LTI-System mit Impulsantwort  $h = D\delta_0$ . Weil die Fouriertransformierte von  $D\delta_0$  eine reguläre Distribution ist, die von der Funktion  $\nu \mapsto 2\pi i\nu$  erzeugt wird, ist der Ableitungsoperator im Frequenzbereich einfach die Multiplikation mit dieser Funktion. Für jedes Eingangssignal  $f$  gilt also

$$\widehat{Df} = 2\pi i\nu \cdot \hat{f}$$

Für Signale  $f \in \mathcal{S}$  ergibt sich dies unmittelbar durch Vertauschung von Differentiation und Integral, wie wir schon früher gesehen haben.

### 11.5.2 90°-Phasenschieber, Hilberttransformator

Der 90°-Phasenschieber  $Q$  wird im Frequenzbereich dadurch definiert, dass er jede harmonische Schwingung um 90° phasenverschiebt. Das bedeutet für positive Frequenzen  $\nu$  die Multiplikation mit  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$  und für negative Frequenzen die Multiplikation mit  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ . Somit wird  $Q$  im Frequenzbereich durch die Multiplikation mit der Funktion  $H = -i \cdot \text{signum}$  beschrieben, also

$$\widehat{Qf} = -i \cdot \text{signum} \cdot \hat{f}$$

Im Zeitbereich ist  $Q$  die Faltung mit  $h = \mathcal{F}^{-1}(H)$ . Man kann zeigen, dass  $h$  keine reguläre Distribution ist, also nicht durch eine Funktion erzeugt wird. Allerdings ist  $h$  durch reguläre Distributionen  $u_\epsilon$  approximierbar, die durch die Funktionen  $h_\epsilon$  erzeugt werden, für die  $h_\epsilon(t) = \frac{1}{t}$  für  $|t| > \epsilon$  und 0 sonst gilt. Für jedes  $f \in L_2(\mathbb{R})$  konvergiert  $u_\epsilon \star f$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  in der  $L_2(\mathbb{R})$ -Norm gegen  $Qf$ .

# Kapitel 12

## Abtasten und Interpolieren

Im Folgenden sei  $T > 0$  die Abtastschrittweite und  $\alpha = \frac{1}{T}$  die Abtastfrequenz. Für  $a > 0$  sei  $\text{rect}_a$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[-a, a]$ . Schon bei der Einführung der Dirac-Impulskämme war erwähnt worden, dass die Abtastung eines analogen Signals  $f$  als das Produkt  $f \cdot \text{comb}_T$  von  $f$  mit dem Impulskamm  $\text{comb}_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$  modelliert werden wird, sofern die Werte des Signals  $f$  in den Punkten  $kT$  wohldefiniert sind.

### 12.1 Shannons Abtasttheorem

#### 12.1.1 Satz (Shannon 1949) (Claude Shannon 1910-2001)

Sei  $f \in L_1(\mathbb{R})$  stetig. Ist  $\hat{f}(\nu) = 0$  für  $|\nu| \geq \frac{1}{2}\alpha$ , so ist  $f$  durch die Abtastwerte  $f(k), k \in \mathbb{Z}$ , Lebesgue-fast überall bestimmt. Es gilt

$$\hat{f} = T \cdot \widehat{f \text{comb}_T} \cdot \text{rect}_{\frac{1}{2}\alpha}$$

und  $T \cdot \widehat{f \text{comb}_T}$  ist die mit der Periode  $\alpha$  periodische Fortsetzung von  $\hat{f}|_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[}$ .

**Sprechweisen:** Ein Signal  $f$ , dessen Fouriertransformierte beschränkten Träger  $S = \{|\nu| : \hat{f}(\nu) \neq 0\}$  hat, heißt *bandbreitenbegrenzt*. Der Wert  $B = \frac{1}{2} \cdot \text{Länge von } S$  heißt die *Bandbreite* von  $f$ , und  $\beta = 2 \sup\{|\nu| : \nu \in S\}$  wird die *Nyquistfrequenz* oder *Nyquistrate* des Signals genannt. Als *Nyquistbedingung* bezeichnet man die Bedingung, dass die Nyquistfrequenz kleiner als die Abtastfrequenz ist.

#### 12.1.2 Damit lässt sich das Abtasttheorem etwas lax so formulieren:

Ist  $f$  bandbreitenbegrenzt und die Nyquistbedingung erfüllt, so ist  $f$  durch die Abtastwerte eindeutig bestimmt.

**Beweis:**  $g$  sei die mit der Periode  $\alpha$  periodische Fortsetzung von  $\hat{f}|_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[}$ . Weil der Träger von  $\hat{f}$  nach Voraussetzung in dem Intervall  $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$  enthalten ist, gilt  $\hat{f} = g \cdot \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$  und

$$\widehat{f \text{comb}_T}(\nu) = \hat{f} \star \alpha \text{comb}_\alpha(\nu) = \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu - k\alpha) = \alpha g(\nu).$$

Folglich ist  $g$  durch die Abtastwerte  $f(kT)$  bestimmt und somit auch  $\hat{f} = g \cdot \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$ . Und weil die Fouriertransformation auf  $L_1(\mathbb{R})$  injektiv ist, ist auch  $f$  durch die Abtastwerte bestimmt. q.e.d.

#### 12.1.3 Satz von Bernstein (Felix Bernstein 1878-1956)

Jedes beschränkte, bandbreitebegrenzte Signal ist beliebig oft differenzierbar, und seine Ableitungen sind ebenfalls beschränkt.

## 12.2 Unterabtastung

Ist die Nyquistbedingung verletzt, so spricht man von einer *Unterabtastung* des Signals. In diesem Fall ist das Signal i.A. nicht mehr durch die Abtastwerte bestimmt. Beispielsweise hat das Signal  $f(t) = \sin \frac{2\pi}{T}t$  in den Abtastzeitpunkten  $kT$  stets den Wert 0 und ist somit anhand der Abtastwerte nicht von dem Nullsignal zu unterscheiden.

Falls man jedoch die Menge der betrachteten Signale geeignet einschränkt, kann man erreichen, dass die Signale trotz Verletzung der Nyquistbedingung durch die Abtastwerte eindeutig bestimmt sind. Der springende Punkt im Beweis des Abtasttheorems ist, dass infolge der Nyquistbedingung die Träger der verschobenen Exemplare  $\tau_{k\alpha}\hat{f}$  sich nicht überlappen und somit  $\hat{f}$  durch Herausschneiden mit der Rechteckfunktion  $\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$  aus  $T \cdot \widehat{f \text{ comb}_T}$  wiedergewonnen werden kann. Das funktioniert aber auch dann, wenn man voraussetzt, dass der Träger von  $f$  nicht unbedingt in dem Intervall  $[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ , sondern in irgendeinem Intervall  $I$  mit Länge kleiner als  $\alpha$  enthalten ist.

**12.2.1 Satz** Sei  $I$  ein Intervall mit Länge kleiner als  $\alpha$ . Dann sind die Signale  $f$ , deren Fouriertransformierte  $\hat{f}$  außerhalb des Intervalls  $I$  verschwindet durch ihre Abtastwerte  $f(kT), k \in \mathbb{Z}$ , eindeutig bestimmt.

Enthält  $I$  nicht den Nullpunkt, so können solche Signale nicht reellwertig sein, weil ihre Fouriertransformierten nicht komplex symmetrisch sein können (außer dem Nullsignal).

## 12.3 Rekonstruktion aus den Abtastwerten

Sei  $f \in L_1(\mathbb{R})$  ein stetiges Signal,  $T > 0$  ein Abtastschrittweite und  $\alpha = \frac{1}{T}$  die zugehörige Abtastfrequenz. Wir wählen die Bezeichnungen wie im Abtasttheorem und setzen voraus, dass für  $f$  die Nyquistbedingung erfüllt ist.

Setze  $\rho(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T}t}{\pi t}$ . Die Funktion  $\rho$  erzeugt eine Distribution  $u_\rho \in \mathcal{S}'$ , deren Fouriertransformierte  $\widehat{u_\rho}$  von der Rechteckfunktion  $\text{rect}_{\frac{1}{2T}} = \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$  erzeugt wird. Dafür schreibt man kurz  $\hat{\rho} = \text{rect}_{\frac{1}{2T}}$ ; man beachte aber, dass dies nicht im klassischen Sinn zu verstehen ist, weil die Funktion  $\rho$  nicht in  $L_1(\mathbb{R})$  liegt.

Außerdem gilt  $\widehat{\tau_x \rho}(\nu) = e^{-2\pi i x \nu} \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$ .

Damit kann man nun in  $\mathcal{S}'$  folgende Rechnung durchführen

$$\begin{aligned} \hat{f} &= T \cdot f \cdot \widehat{\text{comb}_T \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= T \cdot \mathcal{F} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \delta_{kT} \right) \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \\ &= T \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) e^{-2\pi i k T t} \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \\ &= T \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \widehat{\tau_x \rho} \end{aligned}$$

und somit

$$f = T \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \tau_{kT} \rho$$

Man beachte, dass zunächst die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite im Sinne der Topologie auf  $\mathcal{S}'$  zu verstehen ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Reihe (für stetiges  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ) sogar gleichmäßig auf kompakten Mengen konvergiert. Es gilt also tatsächlich punktweise die **Interpolationsformel**

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - kT)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}.$$

Der **ideale Interpolator**  $\mathcal{J}_T$  ordnet einem diskreten Signal  $f_d$  das folgende kontinuierliche Signal zu

$$\mathcal{J}(f_d) = T \cdot \mathcal{F}^{-1} \left( \text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathcal{F} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_d(k) \delta_{kT} \right) \right)$$

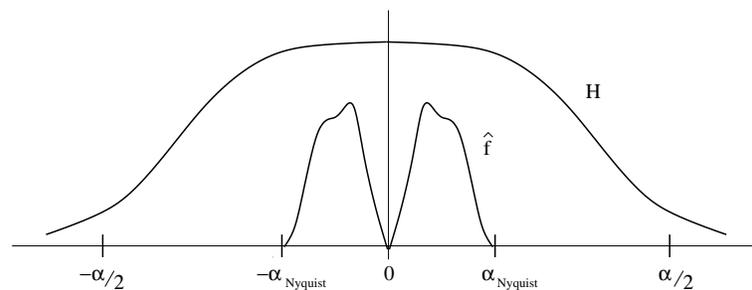
**12.3.1 Bemerkung** Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - kT)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)} \\ &= \frac{\sin \pi t}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \frac{(-1)^k}{t - k} \end{aligned}$$

Derartige Reihen nennt man Kardinalreihen. Über ihr Konvergenzverhalten gibt es ausgiebige Untersuchungen; einen Überblick findet man in einem Artikel von J.R. Higgins, *Five stories about the cardinal series*, Bull.AMS 12 (1985), 45ff. Schon 1929 zeigte E.T. Whittaker, dass die obige Reihe absolut konvergiert, wenn  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \frac{f(kT)}{k} | < \infty$  gilt. Auch die Aussage des Abtasttheorems war wohl E.T. Whittaker schon 1915 bekannt, und bereits 1908 beschäftigte sich de la Vallée Poussin damit. Die technische Relevanz wurde aber erst später mit Shannons Veröffentlichung 1949 deutlich.

**12.3.2 Überabtastung, Over Sampling** Die Reihe in der Interpolationsformel konvergiert oft sehr langsam, was für die Rekonstruktion von  $f$  in Anwendungen schlecht ist, weil man die unendliche Reihe durch eine endliche Partialsumme approximieren muss. Außerdem ist die Kausalität verletzt, weil sich die Summation auch über künftige Abtastwerte erstreckt. Das ist nicht überraschend; denn man erhält  $f$  aus dem abgetasteten Signal  $f \cdot \text{comb}_T$ , indem man dessen Fouriertransformierte mit  $\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}}$  multipliziert, also ein *ideales Tiefpassfilter anwendet*, das nicht kausal ist.

In praktischen Anwendungen muss man dieses ideale Tiefpassfilter durch ein nicht ideales, aber realisierbares ersetzen. Das bedeutet, dass man die Reihe z.B. abschneidet oder durch eine andere Interpolation, z.B. eine lineare Interpolation benachbarter Abtastwerte ersetzt. Man kann diese Schwierigkeit dadurch verringern, dass man die Abtastfrequenz  $\alpha = \frac{1}{T}$  sehr viel größer als die Nyquistfrequenz  $\alpha_{\text{Nyquist}}$  des Signals wählt; denn dann spielt der Frequenzgang des verwendeten Tiefpassfilters in der Nähe seiner Grenzfrequenz keine Rolle mehr. Es sollte lediglich  $H \cdot \hat{f} = \hat{f}$  möglichst gut erfüllt sein. Es genügen einfache Tiefpassfilter mit geringer Flankensteilheit, deren Phasengang dann auch meist einigermaßen linear ist. Man beachte dass das Tiefpassfilter notgedrungen ein analoges Filter ist, weil man ja aus dem abgetasteten Signal wieder ein analoges Signal machen will; und es ist nicht einfach, analoge Tiefpassfilter mit großer Flankensteilheit und einigermaßen linearem Phasengang zu bauen.



## 12.4 Emulation kontinuierlicher LTI-Systeme durch diskrete

Seien  $T > 0$  eine Abtastschrittweite und

$$\mathcal{A}_T: L_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (T \cdot f(kT))_{k \in \mathbb{Z}}$$

die zugehörige Abtastabbildung und

$$\mathcal{J}_T: L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - kT)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$$

der zugehörige ideale Interpolator.

**12.4.1 Satz** Sei  $Q: L_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$  ein kontinuierliches System der Gestalt  $Qf = h \star f$  mit  $h \in L_1(\mathbb{R})$ . Dann gibt es zu jedem  $T > 0$  ein diskretes System  $Q_d: L_1(\mathbb{Z}) \rightarrow L_1(\mathbb{Z})$ , so dass

$$Qf = \mathcal{J}_T \circ Q_d \circ \mathcal{A}_T(f)$$

für jedes Signal  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ , das die Nyquistbedingung erfüllt, für das also der Träger von  $\hat{f}$  im Intervall  $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$  enthalten ist.

**Beweis:** Seien  $\tilde{H}$  und  $\tilde{F}$  die periodischen Fortsetzungen von  $\hat{h}|_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}$  bzw.  $\hat{f}|_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}$ . Dann gilt

$$Qf = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h} \cdot \hat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{F}).$$

Weil  $\tilde{H}$  und  $\tilde{F}$  periodisch sind, sind  $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{H})$  und  $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{F})$  Impulskämme der Gestalt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_d(k) \delta_{kT} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_d(k) \delta_{kT}$$

mit  $h_d \in L_1(\mathbb{Z})$  und  $f_d(k) = T \cdot f(kT)$ , weil  $\tilde{F} = T \cdot f \cdot \widehat{\text{comb}}_T$ . Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{h} \star \tilde{f} &= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_d(k) \delta_{kT} \right) \star \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_d(k) \delta_{kT} \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k+l=j} h_d(k) f_d(l) \delta_{kT} \star \delta_{lT} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_d \star f_d(j) \delta_{jT} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} Qf &= \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{F}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathcal{F}(\tilde{h} \star \tilde{f})) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\text{rect}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} h_d \star f_d(j) \delta_{jT}\right)\right) \\ &= \mathcal{J}_t(h_d \star f_d) \\ &= \mathcal{J}_t \circ Q_d \circ \mathcal{A}_T(f) \end{aligned}$$

q.e.d.

# Kapitel 13

## Skizzenhafte Grundlagen der Informationsübertragung

### 13.1 Modulation

Im technischen Sinn ist eine Datenquelle ein Gerät, das in jedem Zeitpunkt ein Zeichen aus einem vorgegebenen Alphabet ausgibt. Das Alphabet kann eine endliche Menge sein, aber auch kontinuierlich, also z.B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Die Zeit kann diskret sein, also  $\mathbb{Z}$  oder ein Intervall in  $\mathbb{Z}$ , oder auch kontinuierlich, also  $\mathbb{R}$  oder ein Intervall in  $\mathbb{R}$ . Eine Datenquelle erzeugt somit eine Folge von Zeichen, z.B. Text, oder eine kontinuierliche Funktion der Zeit, z.B. die Ausgangsspannung eines Mikrofons. Welche Zeichen zu welchen Zeitpunkt ausgegeben werden, kann sehr unterschiedlich sein. Häufig bestehen zwischen den Zeichen in benachbarten Zeitpunkten gewisse Abhängigkeiten; sie werden oft stochastisch mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten oder Übergangswahrscheinlichkeiten modelliert.

Welche Bedeutung die von einer Datenquelle ausgegebene Funktion hat, hängt von der jeweiligen Anwendungssituation ab. Für stochastische Datenquellen mit gewissen Eigenschaften hat Claude Shannon einen mathematischen Begriff von Informationsgehalt definiert, der sich in allen technischen Anwendungen bestens bewährt hat. Er fällt aber nicht unbedingt mit dem umgangssprachlichen Begriff von Information zusammen. Er ermöglicht jedoch präzise mathematische Analysen, inwieweit man Datenströme ohne Verluste oder mit sehr geringen Verlusten komprimieren und über Kanäle mit beschränkter Kapazität übertragen kann. Dabei wird der Datenstrom, den eine Datenquelle ausgibt, codiert d.h. abgebildet auf eine andere Zeitfunktion oder Folge, deren Werte aus einem anderen Alphabet stammen. In vielen Anwendungen wird ein binäres Alphabet verwendet, also eine Menge mit zwei Elementen, die oft mit 0 und 1 bezeichnet werden. Man spricht dann von einer binären Codierung.

Wir wollen uns hier nicht weiter mit der Untersuchung solcher Codierungen befassen, sondern gehen davon aus, dass wir den Datenstrom als eine Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben haben. Einen zeitlich diskreten Datenstrom stellt man einfach als Funktion dar, die auf jedem Intervall zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten  $kT$  und  $(k+1)T$  konstant ist.  $g$  ist also in unserer bisherigen Terminologie einfach ein Signal.

Um nun  $g$  zu speichern oder von einem Ort zu einem anderen zu übertragen, muss man die komplexen Funktionswerte in Werte einer physikalischen Größe umwandeln, z.B. in elektrische Spannungen. Wie man dies im Einzelnen am besten tut, hängt von der Art des Speichermediums bzw. des Übertragungskanals ab. Die Übertragungskanäle sind meist Kabel, Funkstrecken oder Lichtleiter. Um das Datensignal  $g$  über so einen Kanal zu übertragen, muss man es irgendwie einem Signal  $f_c$  aufprägen, das durch den Kanal geschickt werden kann. Bei einer Funkstrecke ist  $f_c$  eine elektromagnetische Welle, bei einem Lichtleiter ist  $f_c$  eine Lichtwelle (also auch eine elektromagnetische Welle, nur sehr viel höherer Frequenz). Diese Aufprägung besteht darin, dass man irgendwelche Parameter des Signals  $f_c$  durch  $g$  verändert, z.B. die Amplitude oder Frequenz, wenn  $f_c$  eine Sinusschwingung ist. Diesen Vorgang der Aufprägung eines Signals  $g$  auf ein anderes  $f_c$  wird als *Modulation* bezeichnet. Die Rekonstruktion von  $g$  aus dem modulierten Signal nennt man *Demodulation*.  $g$  heißt oft *Basisbandsignal* (*base band signal*) und  $f_c$  *Trägersignal* (*carrier*). Von dem Basisbandsignal  $g$  werde vorausgesetzt,

dass es endliche Bandbreite hat.

Es gibt etliche verschiedene Arten von Modulationen. Sie unterscheiden sich vor allem in drei Aspekten:

1. Durch den technischen Aufwand
2. Durch ihre Fähigkeit, mit Störungen auf dem Kanal fertig zu werden
3. Durch ihre Fähigkeit, die Übertragungskapazität des Kanals auszunutzen

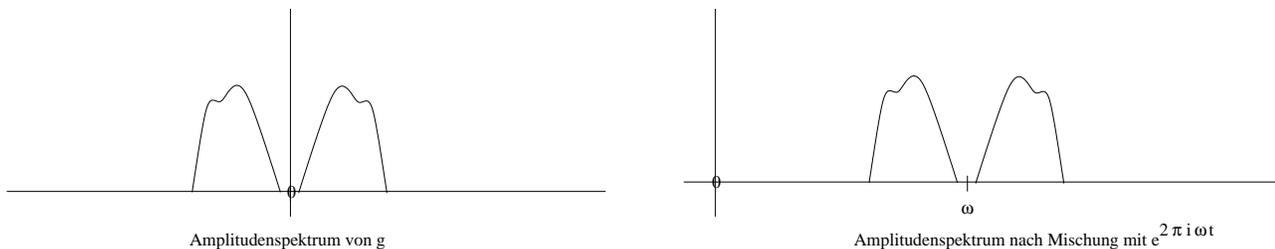
Eine Funkübertragung benötigt eine Antenne, die elektromagnetische Wellen in den Raum abstrahlt. Diese Abstrahlung ist um so effektiver, je näher die geometrische Abmessungen der Antenne der Größenordnung der Wellenlänge sind. Bei sehr niedrigen Frequenzen, z.B. Audiofrequenzen, ist die Wellenlänge viele Kilometer groß, so dass es praktisch unmöglich ist, effiziente Antennen zu bauen. Deshalb verwendet man höherfrequente Sinusschwingungen  $f$ , auf die man das eigentlich zu übertragende Signal  $g$  aufmoduliert. Die Frequenz von  $f$  bewegt sich in der Praxis zwischen einigen 100 kHz bis zu etlichen GHz. Die tiefen Frequenzen unterhalb von 100 kHz entsprechen Wellenlängen von etlichen Kilometern und werden meist nur für Spezialzwecke eingesetzt (z.B. Kommunikation mit U-Booten). Von hoher Bedeutung sind die unterschiedlichen Ausbreitungseigenschaften elektromagnetischer Schwingungen in Abhängigkeit von der Frequenz. Wellen niedriger Frequenz folgen recht gut der Krümmung der Erdoberfläche; sie haben eine ausgeprägte Bodenwelle. Je höher die Frequenz ist, desto geradliniger erfolgt die Wellenausbreitung. Insbesondere im GHz-Bereich ist die Wellenausbreitung schon der Ausbreitung von Licht ähnlich. Infolgedessen ist die Reichweite beschränkt. An Gegenständen wie Gebäuden und Bergen kann es jedoch zu Reflektionen kommen, was man ja gerade bei Radarsignalen ausnutzt. Frequenzen im Kurzwellen und UKW-Bereich, also zwischen einigen MHz und einigen Hundert MHz, werden manchmal auch an ionisierten Schichten in der Atmosphäre reflektiert, wodurch die Reichweite drastisch ansteigen kann. Durch Mehrfachreflektionen an Atmosphärenschichten und/oder dem Erdboden kann die Reichweite im Kurzwellenbereich auf einige 10000 km ansteigen und im UKW-Bereich auf einige 1000 km.

### 13.1.1 Mischer

Bei fast allen Verfahren zur Modulation und Demodulation werden sogenannte Mischer eingesetzt. Das sind Schaltungen oder Geräte, die abstrakt gesprochen einfach nur die punktweise Multiplikation zweier Signale ausführen. Im Rechner ist das kein prinzipielles Problem. Zwei analoge Signale mit Hilfe elektronischer Bauteile zu multiplizieren ist schwieriger, vor allem wenn ein hoher Dynamikbereich erforderlich ist. Es gibt sehr unterschiedliche Lösungen, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen, weil das für die prinzipielle Betrachtung keine Rolle spielt. Allen gemeinsam ist, dass sie nur reellwertige Signale verarbeiten. Komplexwertige Signale werden grundsätzlich durch zwei reellwertige Signale, nämlich Real- und Imaginärteil, dargestellt. Entsprechend braucht man mehrere reelle Mischer, um eine komplexe Multiplikation durchzuführen.

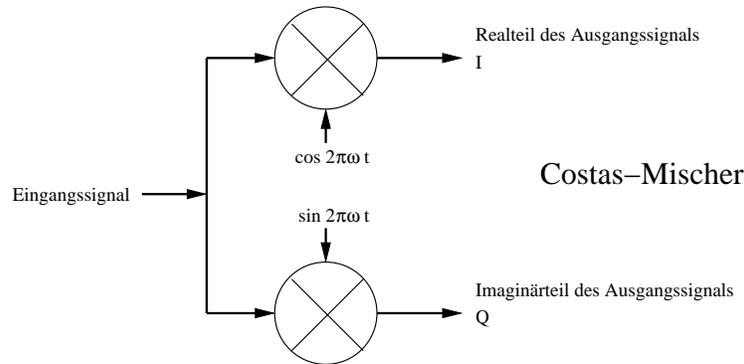
Wir erinnern daran, dass die Multiplikation zweier Signale  $f$  und  $g$  im Zeitbereich der Faltung  $\hat{f} \star \hat{g}$  im Frequenzbereich entspricht. Ein besonders häufiger Spezialfall ist  $f(t) = e^{2\pi i \omega t}$ . Wegen  $\hat{f} = \delta_\omega$  ist dann  $\hat{f} \star \hat{g} = \tau_\omega g$ .

**Fazit:** Mischung eines Signals  $g$  mit der harmonischen Schwingung  $e^{2\pi i \omega t}$  bedeutet im Frequenzbereich die Verschiebung des Spektrums  $\hat{g}$  von  $g$  um  $\omega$ .



Dies ist die Schlüsselmethode, um Signale in andere Frequenzbereiche zu verschieben, und damit das Grundprinzip jedes Senders und Empfängers. In der Praxis ist  $g$  oft ein reellwertiges Signal, z.B. die Ausgangsspannung einer Antenne. Man braucht dann zwei Mischer für reellwertige Signale. Beide erhalten als das eine Eingangssignal das Signal  $g$ ; als zweites Eingangssignal erhält der eine Mischer das Signal  $\cos 2\pi \omega t$ , der andere das Signal  $\sin 2\pi \omega t$ . Die zweiten Eingangssignale sind also um  $90^\circ$  phasenverschoben; daher spricht man auch von einer

Quadraturmischung. Manchmal wird so ein Mischer auch *Costas-Mischer* genannt nach dem amerikanischen Ingenieur John P. Costas (1923-2008).



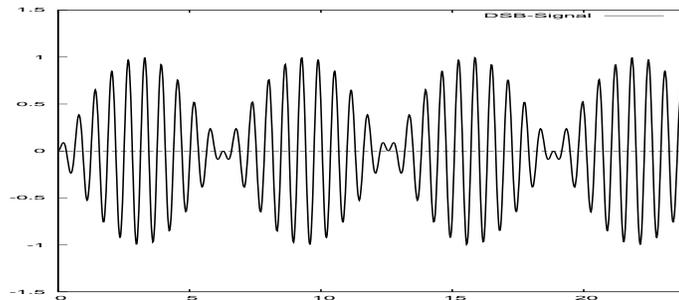
Die Ausgänge der beiden reellen Mischer sind Real- und Imaginärteil des gemischten Signals. Sie werden üblicherweise als I-Signal und Q-Signal bezeichnet, wobei I für In-Phase und Q für Quadratur steht.

### 13.1.2 Amplitudenmodulation

Das Basisbandsignal  $g$  ist ein reellwertiges, analoges Signal, z.B. ein Audiosignal. Als Trägersignal  $f_c$  wird eine Sinusschwingung  $f_c(t) = A \cos 2\pi\nu_c t$  mit Amplitude  $A > 0$  genommen. In der Praxis ist die Frequenz  $\nu_c$  des Trägersignals  $f_c$  deutlich höher als die höchste im Basisbandsignal  $g$  vorhandene Frequenz. Bei der Amplitudenmodulation wird nun die Amplitude  $a$  nicht konstant gehalten, sondern proportional zum Basisbandsignal  $g$  verändert. Es wird also das Signal

$$f(t) = A \cdot g(t) \cdot \cos 2\pi\nu_c t$$

gebildet. Zur Erzeugung von  $f$  braucht man also einen Mischer, d.h. ein Gerät, das zwei analoge Signale multiplizieren kann.

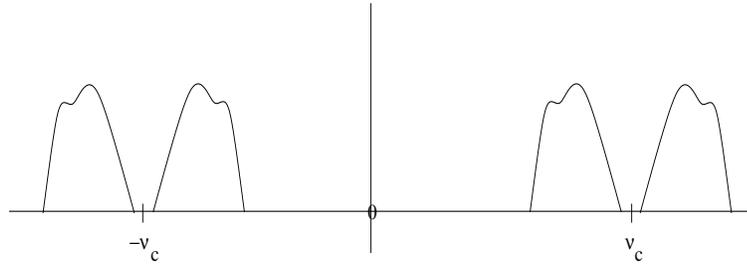


Im Frequenzbereich ergibt sich

$$\hat{f}(\nu) = \frac{A}{2} (\hat{g} \star \delta_{\nu_c} + \hat{g} \star \delta_{-\nu_c})$$

Das Spektrum von  $f$  besteht also im Wesentlichen aus dem Spektrum von  $g$ , das um  $\nu_c$  und  $-\nu_c$  verschoben ist. Ist beispielsweise  $g(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$ , so besteht das modulierte Signal  $f$  also aus zwei reellen harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen  $\nu_c - \nu_0$  und  $\nu_c + \nu_0$ . Die Teile des Spektrums unterhalb von  $\nu_c$  und oberhalb von  $\nu_c$  nennt man das *untere Seitenband (LSB, lower side band)* bzw. das *obere Seitenband (USB, upper side band)*.

Diese Art der Modulation nennt man *Amplitudenmodulation mit unterdrücktem Träger* oder *DSB (Double Side Band)*.

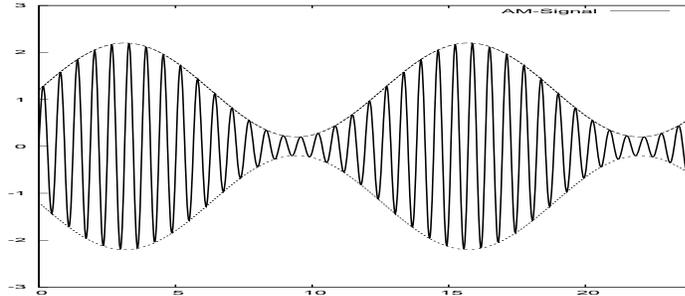


Amplitudenspektrum eines amplitudenmodulierten Signals ohne Träger

Die klassische Amplitudenmodulation (AM) ist demgegenüber leicht modifiziert:

$$f(t) = A \cdot (1 + g(t)) \cos 2\pi\nu_c t$$

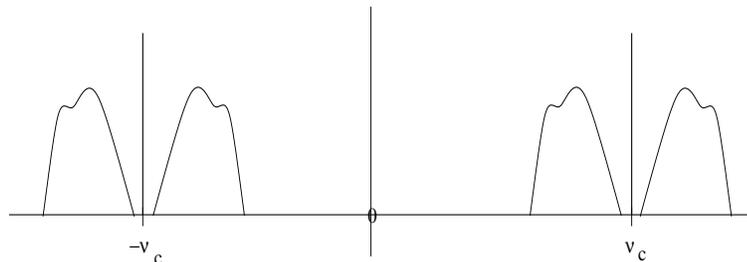
Dabei wird vorausgesetzt, dass stets  $|g(t)| \leq 1$  gilt.



Im Frequenzbereich ergibt sich

$$\hat{f}(\nu) = \frac{A}{2}(\hat{g} \star \delta_{\nu_c} + \hat{g} \star \delta_{-\nu_c}) + \frac{A}{2} \cdot (\delta_{\nu_c} + \delta_{-\nu_c})$$

Der Unterschied zur Amplitudenmodulation mit unterdrücktem Träger besteht darin, dass jetzt nicht nur die beiden Seitenbänder, sondern eben auch noch die Trägerfrequenz vorhanden ist. Ist beispielsweise  $g(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$ , so besteht das modulierte Signal  $f$  also aus drei reellen harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen  $\nu_c - \nu_0$ ,  $\nu_c + \nu_0$  und  $\nu_c$ .



Amplitudenspektrum eines amplitudenmodulierten Signals mit Träger

Der Trägerfrequenzanteil enthält keinerlei Information über das Basisbandsignal  $g$ . Deshalb verbraucht seine Aussendung unnötige Leistung. Dass trotzdem seit mehr als 100 Jahren diese Art der Amplitudenmodulation ohne Trägerunterdrückung eingesetzt wird, liegt an den mangelhaften technischen Möglichkeiten in früheren Zeit. Es war schwierig, gute Mischer zu konstruieren, also Schaltungen, die eine exakte, vorzeichenrichtige Multiplikation durchführen. Desweiteren ist die Demodulation von amplitudenmodulierten Signalen mit unterdrücktem Träger schwieriger; dazu mehr bei im folgenden Abschnitt über Einseitenbandmodulation. Bei der klassischen AM ist die Demodulation einfach, denn die Hüllkurve des Signals ist das Basisbandsignal; man muss also nur die momentane Amplitude von  $f$  bestimmen, z.B. indem man mit einer Diode die negativen Halbwellen abschneidet und die verbleibenden positiven Halbwellen mit einem RC-Glied glättet.

### 13.1.3 Einseitenbandmodulation

Ist das Basisbandsignal  $g$  reellwertig, so ist es bereits durch sein Spektralanteile für die nichtnegativen Frequenzen bestimmt. Dann ist bei der Amplitudenmodulation ein Seitenband überflüssig; es kann aus dem anderen rekonstruiert werden. Wenn man ein Seitenband und den Träger eliminiert und nur noch das andere Seitenband behält, spricht man von *Einseitenbandmodulation* ( $SSB = \text{single side band}$ ). Welches Seitenband man behält, ist willkürlich. Es hat sich eingebürgert, bei Radiosignalen unterhalb von 10 MHz das untere und sonst das obere Seitenband auszusenden.

SSB hat große **Vorteile** gegenüber AM:

1. Das Signal belegt nur die halbe Bandbreite. Man kann also gegenüber AM doppelt so viele Signale in einem Frequenzbereich unterbringen.
2. Die gesamte ausgesendete Energie steckt in dem einen Seitenband, das die Information trägt, und wird nicht für die Aussendung des redundanten, zweiten Seitenbandes und eventuell auch noch des Trägers vergeudet.

SSB hat aber auch einige **Nachteile**:

1. Der Empfänger hat keinerlei Kenntnis über die ursprüngliche Trägerfrequenz  $\nu_c$ ; daher kann bei der Demodulation die richtige Frequenzlage des Basisbandsignals nicht rekonstruiert werden. Handelt es um Musik, so ist das sehr lästig. Handelt es sich um Sprache, so ist das weniger schlimm, weil leichte Verschiebungen der Tonhöhe die Verständlichkeit nicht verschlechtern; häufig wird sie sogar ein wenig besser, wenn man die Tonhöhe etwas zu hoch einstellt, also annimmt, dass die Trägerfrequenz ein wenig weiter von dem Seitenband entfernt ist.
2. Die Erzeugung eines analogen SSB-Signals und auch seine Demodulation sind nicht mehr so einfach zu bewerkstelligen wie die eines AM-Signals. Man beachte, dass die Hüllkurve eines SSB-Signals nicht das Basisbandsignal ist.

#### 13.1.3.1 Die Erzeugung von Einseitenbandsignalen

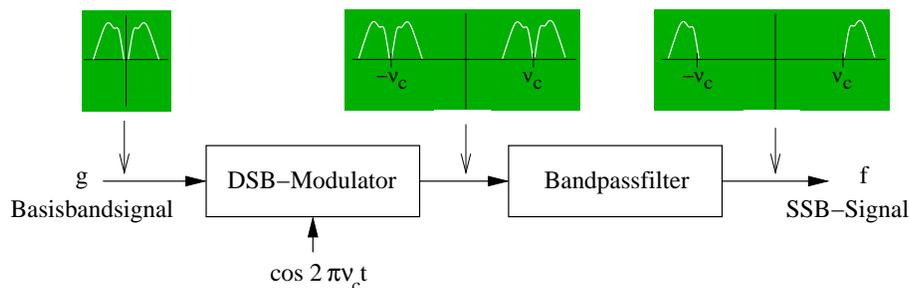
Es gibt im Wesentlichen drei Arten, ein SSB-Signal zu erzeugen. Wir versuchen, zu veranschaulichen, wie die Signalverarbeitung jeweils verläuft, indem wir für jedes Signal das Spektrum ein wenig symbolisch darstellen.

##### 13.1.3.1.1 Vereinbarung über die Diagrammdarstellung

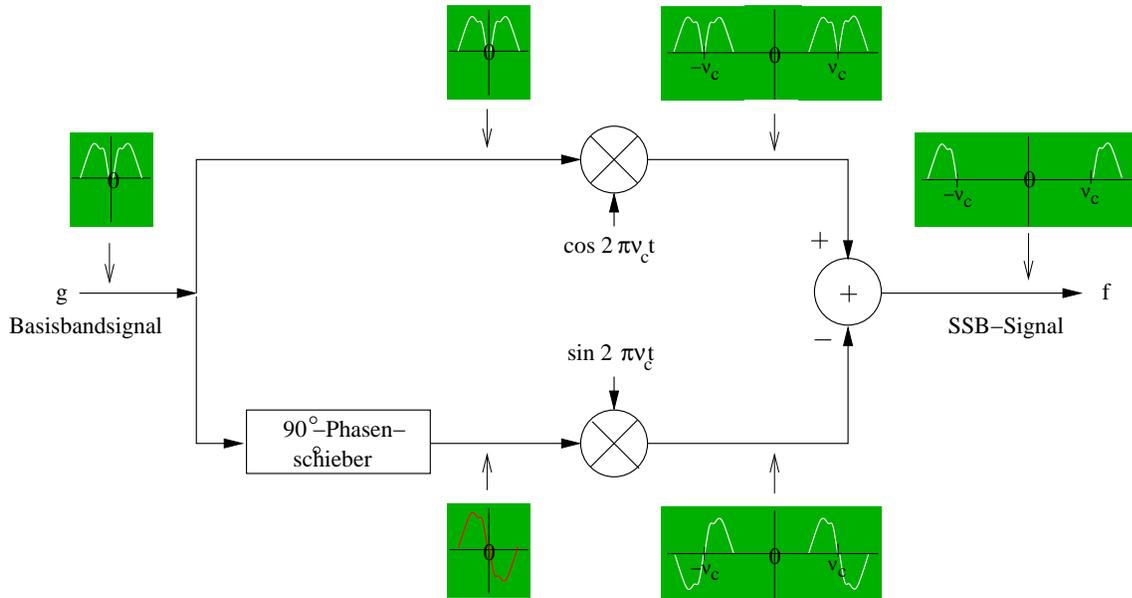
Die verwendeten Verarbeitungsschritte sind Mischung, Tiefpassfilterung und Phasenverschiebung um  $90^\circ$ . Die Veränderungen, die das Spektrum eines Signals dadurch erfährt, lassen sich aus Verschieben, Abschneiden und Multiplizieren mit  $-1$  und mit  $i$  beschreiben. Um das in Diagrammen zu veranschaulichen, wird das Spektrum des Basisbandsignals als eine Kurve dargestellt, die aus zwei bezüglich des Nullpunkts spiegelbildlichen Hälften besteht. Alle Kurvenwerte sind nicht negativ gewählt. Tatsächlich können die Werte natürlich komplex sein. Wir wollen aber darstellen können, wenn ein Teil des Spektrums mit  $-1$  multipliziert wird; dazu spiegeln wir ihn an der x-Achse, d.h. wir klappen wir ihn nach unten. Alle Werte, die mit  $i$  zu multiplizieren sind, sind rot gezeichnet.

##### 13.1.3.1.2 Die Filtermethode

Erzeuge ein DSB-Signal und eliminiere das unerwünschte Seitenband durch ein steilflankiges Bandpassfilter, das nur das erwünschte Seitenband durchlässt. Solche Filter kann man mit Hilfe von Quarzen oder keramischen Resonatoren konstruieren, allerdings nur für einen fest vorgegebenen Durchlassbereich. Üblich sind Filter mit 2,7 kHz Breite des Durchlassbereichs. Ihre Mittenfrequenz liegt selten höher als circa 10 MHz. SSB-Signale mit höheren Signalen erhält man durch Mischung.



13.1.3.1.3 Die Phasenmethode

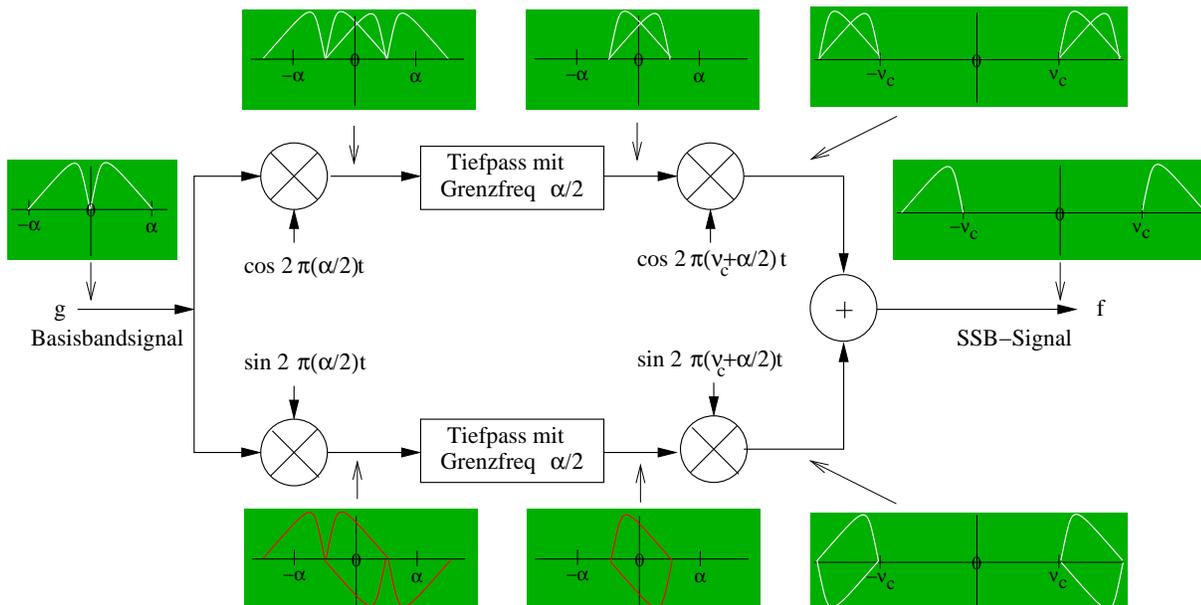


Vorteil: Man braucht kein steilflankiges Bandpassfilter.

Nachteil: 90°-Phasenschieber lassen sich nicht perfekt realisieren, außer für eine einzelne Frequenz. Weil die zu übertragende Information in dem Basisbandsignal codiert ist, hat dieses zwangsläufig eine positive Bandbreite. Selbst wenn es sich um ein Audiosignal mit nur ein paar kHz Bandbreite handelt, ist es sowohl mit analogen elektronischen Bauteilen als auch mit Digitalrechnern schwierig, dafür einen 90°-Phasenschieber zu bauen. Es entstehen immer kleine Phasenabweichungen, die dazu führen, dass bei der Summation zum Schluss das unerwünschte Seitenband nicht vollständig ausgelöscht wird.

13.1.3.1.4 Die Weaver-Methode oder dritte Methode

Es sei  $\alpha$  die höchste im Basisbandsignal  $g$  enthaltene Frequenz. Das folgende Diagramm zeigt den Aufbau eines Weaver-Modulators.



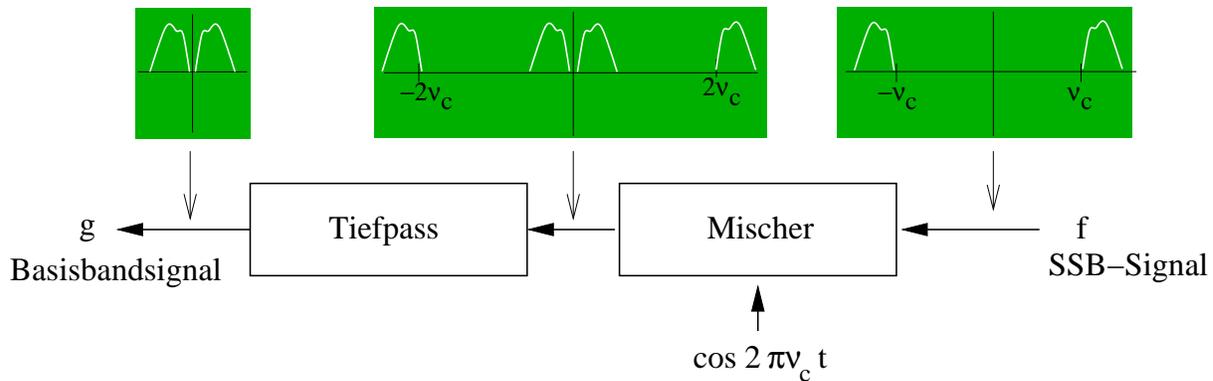
Die grünen Bildchen sollen die Spektren in den Signalpfaden andeuten; es sind aber nicht wirklich die Spektren, weil die Mischung mit  $\frac{1}{j} = -i$  bewirkt und somit imaginäre Werte entstehen. Infolge

der zweimaligen Mischung entstehen im unteren Signalpfad letztendlich wieder reelle Werte. Die Halbierung der Amplitudenwerte bei der Mischung ist nicht dargestellt.

Vorteil: Man braucht weder ein steilflankiges Bandpassfilter auf einer höheren Frequenz noch einen  $90^\circ$ -Phasenschieber. Steilflankige Tiefpassfilter auf niedrigen Frequenzen lassen sich leichter realisieren.

Nachteile: Die beiden Signalzweige müssen in ihren Eigenschaften möglichst identisch sein, damit bei der Summation zum Schluss das unerwünschte Seitenband ausgelöscht wird. Insbesondere müssen die beiden Tiefpassfilter sowohl im Phasen- als auch im Amplitudenfrequenzgang sehr exakt übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so treten im Ausgangssignal Verzerrungen auf. Denn anders als bei der Phasenmethode, wo Phasenfehler lediglich dazu führen, dass das unerwünschte Seitenband nur wenig unterdrückt ist, entstehen hier innerhalb des Frequenzbereichs des erwünschten Seitenbandes Störungen. Außerdem erfolgt die erste Mischung mit einer Frequenz, die mitten im Spektrum des Basisbandsignals liegt. Dadurch entstehen Mischprodukte mit sehr tiefen Frequenzen. Deshalb ist das Verfahren empfindlich gegen Einstreuungen von z.B. Netzbrumm, selbst wenn das Basisbandsignal eine Sprachsignal ist, das nur Frequenzen oberhalb von 300 Hz enthält. Deshalb fügt man manchmal noch ein Hochpassfilter ein, das die sehr tiefen Frequenzen unterdrückt. Dies bedeutet dann aber, dass dem SSB-Signal in der Bandmitte Frequenzanteile fehlen.

### 13.1.3.2 SSB-Demodulation



### 13.1.4 Phasen- und Frequenzmodulation

Als Trägersignal wird wieder  $f_c(t) = A \cos 2\pi\nu_c t$  genommen. Statt die Amplitude von  $f_c$  proportional zum Basisbandsignal  $g$  zu ändern, ändert man nun die Phase oder Frequenz des Trägersignals.

#### 13.1.4.1 Phasenmodulation (PM)

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu_c t + \alpha g(t))$$

#### 13.1.4.2 Frequenzmodulation (FM)

$$f(t) = A \cos(2\pi(\nu_c + \alpha g(t)) t)$$

Das Spektrum eines PM- oder FM-Signals lässt sich nicht so einfach berechnen wie das eines AM- oder SSB-Signals. An einem Spezialfall kann man aber schon alles Wesentliche sehen. Wir nehmen an, dass das Basisbandsignal  $g$  selbst schon eine Sinusschwingung der Form  $g(t) = \sin 2\pi\nu_0 t$  ist. Dann hat das PM-Signal die Gestalt  $f(t) = \cos(2\pi\nu_c t + \alpha \sin 2\pi\nu_0 t)$ . Nimmt man ferner an, dass  $\nu_c$  ein rationales Vielfaches von  $\nu_0$  ist, also  $\nu_c = \frac{n}{d}\nu_0$  mit  $n, d \in \mathbb{N}$  gilt, so ist  $f$  periodisch und kann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Diese Rechnung ist ein wenig mühsam und wird hier nicht ausgeführt. Daraus erhält man dann das Linienspektrum von  $f$  in der Form

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} J_l(\alpha) \delta_{l\nu_0 - \nu_c} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} J_k(\alpha) \delta_{k\nu_0 + \nu_c}$$

Dabei sind die Funktionen  $J$  die Besselfunktionen erster Art, die durch folgende Gleichungen definiert werden können:

$\cos(\alpha \sin ns)$  hat die Fourierreihe  $\sum_{k \in 2\mathbb{Z}} J_k(\alpha) e^{ikns}$

$\sin(\alpha \sin ns)$  hat die Fourierreihe  $-i \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} J_k(\alpha) e^{ikns}$

Die Nullstellen der Besselfunktionen liegen diskret verteilt, so dass die Spektrallinien im Allgemeinen nicht verschwindende Amplituden haben. Infolgedessen kommen in dem PM-Signal alle Frequenzen vor, deren Abstand von der Trägerfrequenz  $\nu_c$  ein Vielfaches von  $\nu_0$  ist. Das PM-Signal hat also unendliche Bandbreite! In der Praxis werden PM-Signale natürlich durch Bandpassfilter geleitet, um die Bandbreite zu begrenzen. Dies führt dazu, dass dann die Amplitude des entstehenden Signals nicht mehr ganz konstant ist. In der Praxis verwendet man PM- oder FM-Signale, deren Bandbreite deutlich größer als die von AM-Signale ist.

Der Vorteil von PM- und FM-Signalen liegt in ihrer (nahezu) konstanten Amplitude. Denn die meisten Störungen auf dem Übertragungsweg sind Amplitudenstörungen. Deshalb werden PM- oder FM-Signale im Empfänger hoch verstärkt und dann ihre Amplitude durch eine Schwelle begrenzt. Dadurch sind die Amplitudenstörungen weitgehend eliminiert; der in der Phase bzw. Frequenz codierte Informationsgehalt bleibt jedoch erhalten. Deshalb wird im traditionellen UKW-Rundfunk FM eingesetzt, allerdings mit recht großer Bandbreite.

Ein spezieller Fall liegt vor, wenn das Basisbandsignal  $g$  binär ist, d.h. wenn es nur zwei Werte annehmen kann, die wir als  $-1$  und  $1$  annehmen.

### 13.1.4.3 Frequenzumtastung, Frequency Shift Keying, FSK

Durch Frequenzmodulation von  $g$  auf ein sinusförmiges Trägersignal  $f_c = A \cos(2\pi\nu_c t)$  entsteht ein Signal, das gleich  $A \cos(2\pi(\nu_c + \alpha)t)$  ist, solange  $g$  den Wert  $1$  hat, und gleich  $A \cos(2\pi(\nu_c - \alpha)t)$ , solange  $g$  den Wert  $-1$  hat. Es ist also ein sinusförmiges Signal, dessen momentane Frequenz im Rhythmus von  $g$  zwischen zwei Frequenzen hin- und herwechselt. Diese Modulationsart wurde bei Funkfernsehern und analogen Telefonmodems angewendet. Seine Bandbreite ist jedoch unendlich, wenn die Frequenzwechsel tatsächlich sprunghaft, also unstetig erfolgen. Selbst wenn die Frequenzwechsel stetig erfolgen, ist die Bandbreite bei hoher Datenrate unangenehm groß.

### 13.1.4.4 Phasenumtastung, Phase Shift Keying, PSK

Statt wie bei FSK die Frequenz umzuschalten, kann man auch die Phase des Trägersignals im Rhythmus von  $g$  zwischen zwei Werten hin- und herschalten. Auch hier ist die Bandbreite unendlich. Wählt man als Phasenwerte  $0$  und  $\pi$ , so bedeutet dies, dass man das Trägersignal einmal mit  $1$  und das andere Mal mit  $-1$  multipliziert. Wenn das Basisbandsignal selbst schon diese beiden Werte annimmt, kann man das modulierte Signal einfach beschreiben als  $f(t) = Ag(t) \cos(2\pi\nu_c t)$ . Das ist ein DSB-Signal. Die Bandbreite ist so groß wie die von  $g$ .

### 13.1.4.5 PSK31

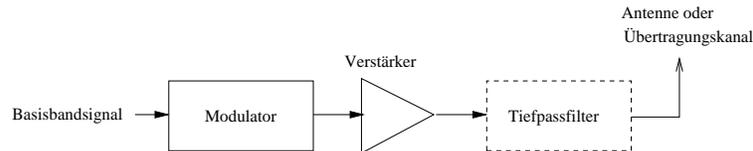
Die große Bandbreite von PSK kann man verringern, wenn man die Amplitude Trägersignals vor jedem Phasenwechsel langsam auf  $0$  abfallen lässt, bevor ein Phasenwechsel erfolgt, und danach wieder langsam ansteigen lässt. Dies kann man dadurch erreichen, dass man die Rechteckform des Basisbandsignals  $g$  „runder“ macht. Dazu nehmen wir an, dass die Vorzeichenwechsel von  $g$  nur in einem festen Zeitraster zu den den Zeitpunkten  $kT$  erfolgen können. Wenn zum Zeitpunkt  $kT$  ein Wechsel von  $+1$  nach  $-1$  vorkommt, ersetzen wir  $g$  im Intervall  $[(k - \frac{1}{2})T, (k + \frac{1}{2})T]$  durch  $\sin(\frac{2\pi}{T}(t - k))$ ; wenn eine Wechsel von  $-1$  nach  $+1$  vorkommt durch  $-\sin(\frac{2\pi}{T}(t - (k - \frac{1}{2})))$ . Sei  $\tilde{g}$  das so modifizierte Signal. Man bildet nun das Signal  $f(t) = A\tilde{g}(t) \cos(2\pi\nu_c t)$ . Dieses Signal hat nun keine unstetigen Phasen- oder Amplitudensprünge mehr. Es ist ein DSB-Signal, also ein AM-Signal mit unterdrücktem Träger. Seine Bandbreite ist gleich der von  $\tilde{g}$ . Die Bandbreite von  $\tilde{g}$  ist am größten, wenn  $g$  zu jedem Zeitpunkt  $kT$  einen Vorzeichenwechsel hat. Dann ist  $\tilde{g}(t) = \sin(\frac{2\pi}{T}t)$  oder  $\tilde{g}(t) = -\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ , je nachdem welchen Vorzeichenwechsel  $g$  in  $0$  hat. Das bedeutet, dass das Signal  $f$  eine endliche Bandbreite hat! Nämlich maximal  $\frac{2}{T}$ .

Eine praktische Anwendung ist die Funkübertragung von Text, der auf einer Tastatur eingetippt und durch die ASCII-Codierung binär codiert wird. Als Bitrate wählt man  $\frac{1}{T} = 31,25$  Hz; das reicht für normale Tippgeschwindigkeit aus. Daher der Name PSK31. Die Bandbreite von  $f$  beträgt dann nur  $62,5$  Hz. Das ist viel weniger als bei den traditionellen FSK-Fernschreibverfahren.

## 13.2 Sender- und Empfänger-Konzepte

### 13.2.1 Sender

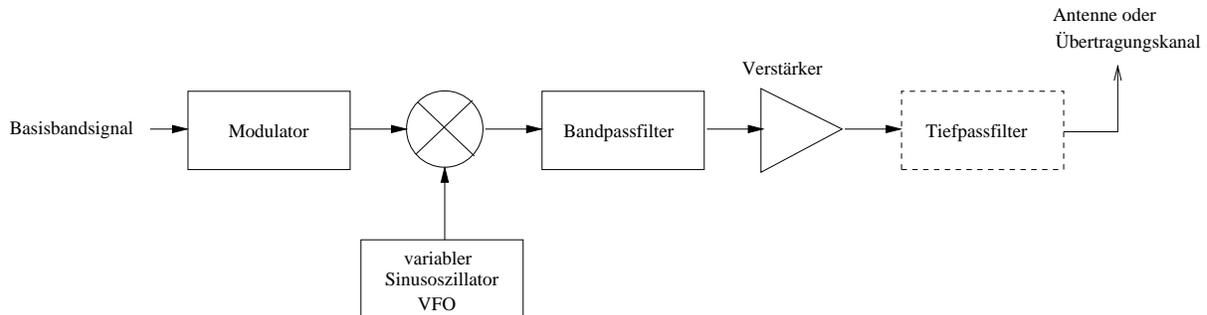
#### 13.2.1.1 Prinzip



Das modulierte Signal wird von einem Verstärker auf die gewünschte Leistung gebracht und dann in den Übertragungskanal eingespeist. Das Tiefpassfilter ist vom Prinzip her nicht nötig. Weil die Verstärker aber nicht exakt linear arbeiten, entstehen Oberwellen, die meist unerwünscht sind, weil sie andere Übertragungen stören können.

#### 13.2.1.2 Mischung

Um die Sendefrequenz zu ändern könnte man in den Modulator eine andere Trägerfrequenz einspeisen. Meist arbeitet der Modulator aber mit einer festen Trägerfrequenz, weil er dann einfacher zu realisieren ist. Die Umsetzung auf die gewünschte Sendefrequenz erfolgt erst anschließend durch einen Mischer. Ist  $\nu_c$  die Trägerfrequenz des Ausgangssignals des Modulators und mischt man es mit einem reellen Sinussignal der Frequenz  $\nu_{\text{vfo}}$ , so entstehen am Mischerausgang zwei Signalanteile mit Frequenzen bei  $\nu_{\text{vfo}} + \nu_c$  und  $\nu_{\text{vfo}} - \nu_c$ . Man nennt sie *Spiegelfrequenzen*. Man wählt nun  $\nu_{\text{vfo}}$  so, dass eine davon der gewünschten Sendefrequenz entspricht. Die andere wird durch ein Bandpassfilter unterdrückt.



Diese Mischung entspricht der Erzeugung eines DSB-Signals, wobei das Ausgangssignal des Modulators die Rolle des Basisbandsignals spielt. Die beiden Spiegelfrequenzanteile sind die beiden Seitenbänder. Die Unterdrückung des einen entspricht der Filtermethode zur SSB-Erzeugung. Weil die Frequenz des Modulatorausgangssignals meist einige 100kHz oder MHz beträgt, ist der Abstand der beiden Seitenbänder einigermaßen groß, so dass man kein allzu steilflankiges Bandpassfilter braucht, um das unerwünschte Seitenband zu unterdrücken. Damit ist man in einer günstigeren Situation als wenn das Basisband im Audiofrequenzbereich liegt und somit die beiden Seitenbänder direkt aneinander angrenzen oder nur einige 100 Hz Abstand haben. Das Bandpassfilter kann also etwas breiter gewählt werden, so dass man es auch bei Änderungen der Oszillatorfrequenz nicht immer gleich nachstimmen muss.

#### 13.2.1.3 Direkte Erzeugung des Sendesignals

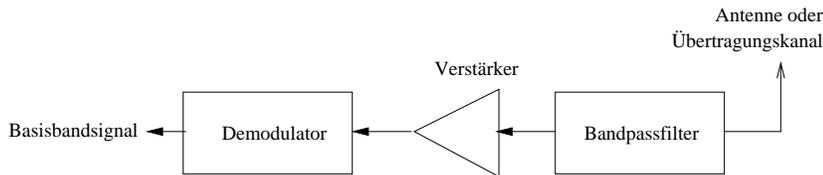
Will man das Basisbandsignal als SSB-Signal aussenden, so kann man das Sendesignal mit Hilfe der Phasemethode oder der Weaver methode direkt erzeugen. Man wählt als Trägerfrequenz  $\nu_c$  im Modulator einfach die gewünschte Sendefrequenz. Sie darf auch variabel sein. Die Filtermethode zur SSB-Erzeugung ist dafür in der Praxis nicht geeignet, weil sie ein Bandpassfilter braucht, das nur für eine feste Mittenfrequenz ausreichend steilflankig realisiert werden kann; es besteht meist aus Quarzen oder Keramikresonatoren, deren Frequenz nicht verändert werden kann.

Die direkte Erzeugung des Sendesignals mit der Phasen- oder Weaver methode hat noch einen weiteren Vorteil; es entsteht nämlich kein unerwünschter Spiegelfrequenzanteil! Man benötigt also auch kein Bandpassfilter. Dies ist besonders interessant für kleine Sender wie Mobiltelefone, weil analoge Bandpassfilter aus Bauteilen wie

Spulen, Kondensatoren oder Resonatoren bestehen, die Platz brauchen, der in so kleinen Mobilgeräten nicht vorhanden ist.

### 13.2.2 Empfänger

#### 13.2.2.1 Prinzipieller Aufbau eines Empfängers

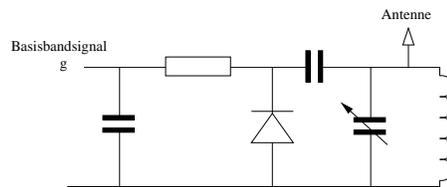


Das Bandpassfilter dient dazu, nur das erwünschte Signal an den Demodulator durchzulassen und alle anderen zu unterdrücken.

**Problem:** Steifflankige Bandpassfilter sind in höheren Frequenzbereichen kaum zu realisieren, schon gar nicht, wenn ihr Durchlassbereich auch noch abstimmbaar sein soll, um unterschiedliche Sender empfangen zu können.

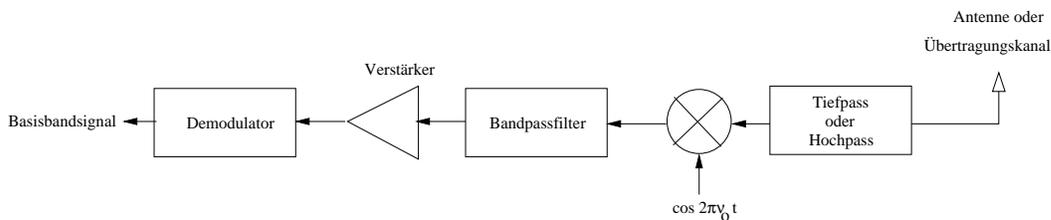
##### 13.2.2.1.1 AM-Detektor

Empfänger, die unmittelbar nach obigem Prinzip aufgebaut sind, gab es nur in der Anfangszeit des Rundfunks zum Empfang von AM-Signalen mit Träger. Der Bandpass bestand meist nur aus einem Schwingkreis, der Verstärker fehlte oft ganz, und der Demodulator bestand aus einer Diode, die die negativen Halbwellen des Signals abschnitt, und einer anschließenden Glättung des Signals durch einen einfachen Tiefpass in Gestalt eines R-C-Gliedes. Das Ausgangssignal war dann die Hüllkurve des AM-Signals, das bis auf einen Gleichspannungsanteil dem Basisbandsignal entspricht.



##### 13.2.2.2 Überlagerungsempfänger, Superheterodyn-Empfänger

**Idee:** Verschiebe das Eingangssignal mit einem Mischer in den Frequenzbereich eines Empfängers nach dem obigen Prinzip 13.2.2.1.



Durch die Mischung mit der Frequenz  $\nu_0$  entstehen zwei Signalanteile bei den Frequenzen  $\nu_{in} - \nu_0$  und  $\nu_{in} + \nu_0$ . Die VFO-Frequenz  $\nu_0$  wählt man so, dass ein Anteil im Durchlassbereich des Bandpassfilters liegt; seine Frequenz wird Zwischenfrequenz (ZF) genannt (IF = intermediate frequency). Der andere Anteil wird nicht weiter verwendet und durch das Bandpassfilter unterdrückt.

**Vorteil:** Die Frequenz  $\nu_0$  des Oszillatorsignals kann je nach gewünschter Empfangsfrequenz so gewählt werden, dass das ZF-Signal immer in dem gleichen Frequenzbereich liegt. Das Bandfilter kann somit optimal für diesen festen Frequenzbereich konstruiert werden.

**Nachteil: Spiegelfrequenzempfang** Hat das Oszillator-Signal die Frequenz  $\nu_0$ , so gibt es zwei Eingangsfrequenzen, die von dem Mischer in die ZF  $\nu_{ZF}$  umgesetzt werden, nämlich  $\nu_0 - \nu_{ZF}$  und  $\nu_0 + \nu_{ZF}$ . Die eine liegt unterhalb der VFO-Frequenz, die andere oberhalb. Es werden also zwei verschiedene Eingangssignale gleichzeitig empfangen, was meist unerwünscht ist. Deshalb muss man vor den Mischer noch ein Tief- oder Hochpassfilter, das den jeweils nicht erwünschten Frequenzbereich unterdrückt. Weil die beiden Spiegelfrequenzen den Abstand

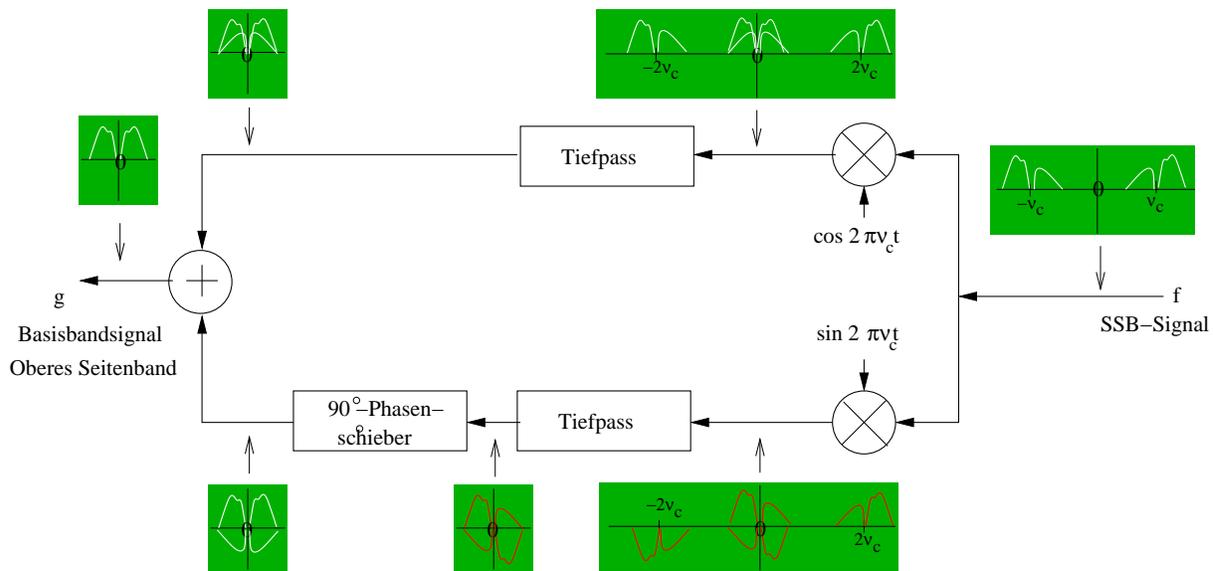
$2\nu_{ZF}$  haben, muss dieses Filter keine extrem hohe Flankensteilheit haben, zumindest wenn die ZF nicht all zu niedrig ist.

### 13.2.2.3 Empfänger mit direkter Umsetzung, Direct Conversion, Zero-IF

#### 13.2.2.3.1 Phasemethode

Das zu empfangende Signal  $f$  belege den Frequenzbereich von  $[\nu_c, \nu_c + \alpha]$ ; man betrachtet es als oberes Seitenband (USB) eines SSB-Signals und versucht das entsprechende Basisbandsignal wiederzugewinnen. Mischt man das Signal  $f$  mit einer Sinusschwingung der Frequenz  $\nu_c$ , so wird es in den Frequenzbereich  $[0, \alpha]$  heruntergemischt. Die Spiegelfrequenzen belegen den Frequenzbereich  $[\nu_c - \alpha, \nu_c]$ , also das untere Seitenband LSB, das ebenfalls nach  $[0, \alpha]$  heruntergemischt wird. Beide Anteile überlagern sich also. Sie lassen sich trennen, indem man die zur SSB-Erzeugung verwendete Phasemethode umkehrt. Das Eingangssignal wird also zwei Mischern zugeführt, von denen der eine mit  $\cos 2\pi\nu_c t$  mischt, der andere mit  $\sin 2\pi\nu_c t$ . Die beiden Ausgangssignale der Mischer (I- und Q-Komponenten eines Costas-Mischers) werden mit Tiefpassfiltern von höheren Frequenzkomponenten befreit und um  $90^\circ$  gegeneinander in der Phase verschoben. Dazu schaltet man in den Q-Signalfeld einen  $90^\circ$ -Phasenschieber (Hilberttransformator). Wenn man die beiden entstehenden Signale addiert, heben sich die Spiegelfrequenzanteile gerade auf und man erhält das dem USB entsprechende Basisbandsignal. Wenn man sie subtrahiert, bleiben umgekehrt die Spiegelfrequenzanteile erhalten und man bekommt das dem LSB entsprechende Basisbandsignal. Durch die Tiefpassfilterung werden Eingangssignale mit Frequenzen, die weiter als  $\alpha$  von  $\nu_c$  wegliegen, unterdrückt.

Bei der Mischung mit  $\sin$  und der Phasenverschiebung werden die Spektren teilweise imaginär; diese Multiplikation mit  $i$  ist nur durch die rote Färbung angedeutet. Dass bei zweimaliger Multiplikation mit  $i$  sich einfach das Negative ergibt, ist aber berücksichtigt.

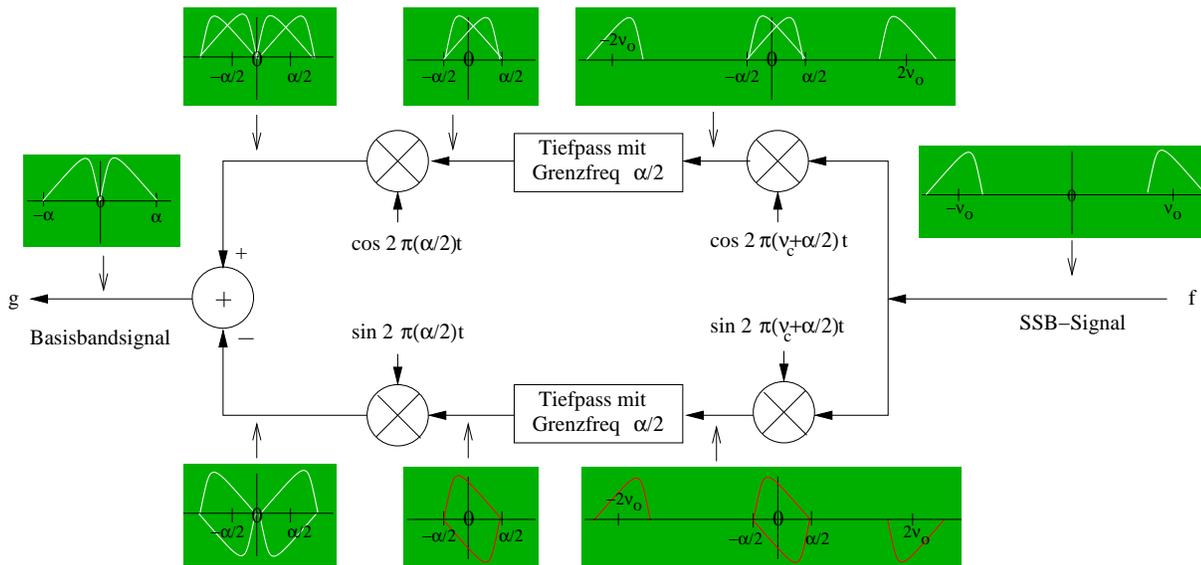


**Vorteile:** Es wird kein steilflankiges ZF-Bandpassfilter benötigt, sondern nur Tiefpassfilter in niedrigem Frequenzbereich, die leichter zu realisieren sind.

**Probleme:** Man braucht einen Phasenschieber, der den gesamten Frequenzbereich des Basisbandsignals um  $90^\circ$  in der Phase schiebt. Solche Phasenschieber sind aber nicht exakt realisierbar. Kleine Phasenfehler bewirken, dass das unerwünschte Seitenband (also die Spiegelfrequenzen) nicht mehr exakt eliminiert wird.

#### 13.2.2.3.2 Weavermethode

Das zu empfangende Signal  $f$  belege den Frequenzbereich von  $[\nu_c, \nu_c + \alpha]$ . Es wird in zwei Mischern mit  $\cos 2\pi\nu_o t$  bzw. mit  $\sin 2\pi\nu_o t$  gemischt, wobei  $\nu_o = \nu_c + \frac{\alpha}{2}$  ist. Im Gegensatz zur obigen Phasemethode wird hier die Oszillatorfrequenz mitten im Frequenzbereich von  $f$  gewählt. Während bei der Phasemethode die Spiegelfrequenzen außerhalb des Spektrums von  $f$  liegt, sind hier alle heruntergemischten Frequenzen Anteile von  $f$ .



**Vorteile:** Durch die Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz  $\frac{\alpha}{2}$  hinter den Mischern werden alle Eingangssignale mit Frequenzen außerhalb von  $[\nu_c, \nu_c + \alpha]$  unterdrückt. Es gibt somit überhaupt keinen Empfang unerwünschter Spiegelfrequenzen. Es wird kein schwer realisierbarer Phasenschieber und auch kein steilflankiges ZF-Filter benötigt. Die Tiefpassfilter bestimmen nur die empfangene Bandbreite.

**Probleme:** Die beiden Signalpfade müssen in Verstärkung und Phasenlage sehr genau übereinstimmen. Während bei der Phasenmethode kleine Fehler nur eine mangelhafte Unterdrückung des unerwünschten Seitenbandes bewirken, verursachen bei der Weaver-Methode kleine Fehler Verzerrungen des demodulierten Basisbandsignals. Weil Signalanteile in der Mitte des Frequenzbereichs von  $f$  zwischendurch auf sehr tiefe Frequenzen heruntergemischt werden und überdies die Signalamplituden in einem Empfänger sehr klein sind, besteht die Gefahr von Einstreuungen des 50-Hz-Netzbrumms. Deshalb ersetzt man oft die Tiefpassfilter durch Bandpassfilter, die tiefe Frequenzen stark dämpfen. Daann entsteht aber in der Mitte des Spektrums des demodulierten Basisbandsignals eine Lücke.

### 13.3 Binäre Datenübertragung

Während in früheren Zeiten die Daten meist als analoges Signal codiert waren (z.B. Audiosignale im traditionellen Rundfunk), werden heute meist diskrete Codierungen gewählt. Das zu übertragende Signal ist also eine Folge von Zeichen aus einem endlichen Alphabet; sehr oft ist diese Alphabet binär, besteht also nur aus Zeichen, die man meist mit 0 und 1 bezeichnet.

Diskrete Codierungen analoger Daten sind oft mit Informationsverlust verbunden. Meist kann man aber je nach Anwendungssituation die Codierung so wählen, dass die Verluste für die jeweilige Anwendung keine große Rolle spielen. Die Art der Codierung kann aber je nach Anwendung stark variieren (z.B. JPEG, MPEG für Bilder und Filme, MP3 oder LPC für Audiosignale). Ein Vorteil diskreter Codierung ist jedoch, dass man zusätzlich eine fehlerkorrigierende Codierung anfügen kann. Damit ist es dann möglich, Fehler, die bei der Datenübertragung entstehen, zu korrigieren, zumindest solange die Fehlerrate eine gewisse Schwelle nicht übersteigt. Nachteilig ist, dass bei Überschreiten dieser Schwelle die Decodierung und damit die Datenübertragung schlagartig zusammenbricht. Bei Bild- oder Sprachsignalen wird das meist als viel unangenehmer empfunden als Rauscheinbrüche bei analoger Übertragung; man vergleiche z.B. DVB-T mit Analog-TV oder analogem FM-Rundfunk im Auto.

Wir gehen nun davon aus, dass die Daten als 0-1-Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vorliegen. Diese Folge soll bitweise in einem äquidistanten Zeitraster mit Schrittweite  $T > 0$  übertragen werden, und zwar über einen analogen Kanal wie z.B. ein Kabel oder eine Funkstrecke. Analog bedeutet hier, dass das physikalische Medium analoge Zustände annehmen kann, z.B. Spannungswerte. Man muss also die Folge  $(d_n)$  durch ein analoges Signal  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

codieren. Je nach Kanal kann dann dieses Signal direkt über den Kanal übertragen werden oder erst noch auf ein Trägersignal aufmoduliert werden.

### 13.3.1 Einfacher Ansatz, NRZ-Codierung

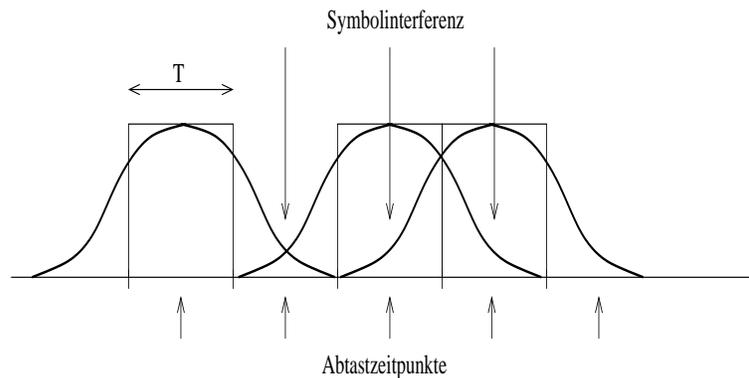
*Codierung:* Sei  $A > 0$ . Ist  $d_n = 1$ , so setze  $g(t) = A$  für  $t \in [(n - \frac{1}{2})T, (n + \frac{1}{2})T[$  und 0 sonst.

*Decodierung:* Taste das Signal  $g$  in der Mitte der Zeitrasterintervalle, also in den Zeitpunkten  $nT$  ab und setze  $d_n = 1$ , wenn  $f(nT) > \frac{A}{2}$  ist, und  $d_n = 0$  sonst.

#### 13.3.1.1 Bemerkungen:

1. Es gibt zwei Arten von Störungen. Zum einen Amplitudenstörungen, d.h. dass der Abtastwert von 0 oder  $A$  abweicht. Solange die Stör-Amplitude kleiner als  $\frac{A}{2}$  bleibt, wird richtig decodiert. Zum anderen Verschiebungen des Abtastzeitpunkts, sog. Jitter. Solange der Abtastzeitpunkt nicht aus dem entsprechenden Rasterintervall wandert, wird richtig decodiert. Insgesamt ist die Codierung recht unempfindlich gegenüber Störungen.

2. Jeder Wechsel von 0 nach 1 erzeugt einen un stetige Sprungstelle im Signal, so dass es unendliche Bandbreite hat! In realen Anwendungssituationen haben Übertragungskanäle immer endliche Bandbreite; sie benehmen sich wie ein Tiefpassfilter, durch das man das Signal schickt. Aus einem Sprung im Signal wird die Sprunganwort des Tiefpassfilters. Die Sprünge werden also verschmiert. Dadurch kommt es zu einer sog. *intersymbol interference*, d.h. der die 1 darstellende Signalverlauf lappt in benachbarte Zeitrasterintervalle und verfälscht dort die Signalwerte. Dies kann dazu führen, dass die Decodierung fehlerhaft wird.



### 13.3.2 Wave Shaping

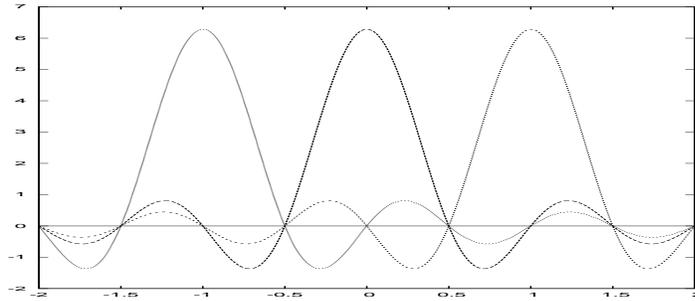
**13.3.2.1 Idee:** Stelle  $d_n = 1$  nicht durch einen konstanten Pegel im Intervall  $[(n - \frac{1}{2})T, (n + \frac{1}{2})T[$  dar, sondern durch einen anderen Signalverlauf. Wähle dafür ein Signal  $s_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger und stelle  $d_n = 1$  durch  $s_1(t - nT)$  dar. Bezeichnet man mit  $s_0$  das konstante Nullsignal, so ist also das gesamte Übertragungssignal  $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_{d_n}(t - nT)$ .

**13.3.2.2 Problem:** Wie soll man das Signal  $s_1$  und die Schrittweite  $T$  wählen, so dass

1. bei gegebener Bandbreite  $B$  des Übertragungskanals die Übertragung möglichst schnell ist und
2. die Übertragung möglichst unempfindlich gegenüber Störungen wird.

Um die Bandbreite des Kanals möglichst gut auszunutzen, sollte die Fouriertransformierte des Signals  $s_1$  konstant sein, also z.B. gleich  $\text{rect}_B$ . Man könnte also  $s_1(t) = A \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_B) = A \frac{\sin 2\pi B t}{2\pi B t} =: A \text{sinc}(2\pi B t)$  wählen.

Diese Funktion hat Nullstellen in den Punkten  $n \frac{1}{2B}$  für  $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Wählt man als Schrittweite  $T = \frac{1}{2B}$ , so tritt mit obiger Decodierung keine Intersymbol Interference auf! In den Mittelpunkten der benachbarten Rasterintervalle hat  $\text{sinc}(2\pi B(t - nT))$  Nullstellen und verfälscht den dortigen Signalwert nicht. Allerdings kann bereits ein kleiner Jitter schon dazu führen, dass doch Verfälschungen auftreten, deren Summe schlimmstenfalls nicht einmal konvergiert, weil die Schwingungsamplituden von  $\text{sinc}$  nur linear fallen.

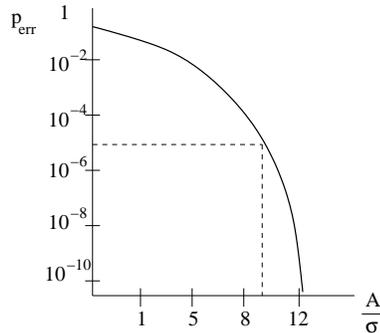


Bei einer Kanalbandbreite von  $B$  Hz, könnte man theoretisch also  $2B$  Bit pro Sekunde übertragen.

Leider hat sinc keinen kompakten Träger und ist deshalb als  $s_1$  in der Praxis nicht geeignet. Als Ausweg bietet sich an, nicht von der idealen Tiefpasscharakteristik auszugehen, sondern von einer mit flacheren Flanken (*wave shaping*). Erzeugt man sie durch Faltung von  $\text{rect}_B$  mit einer Funktion  $W$  mit kompakten Träger, so bedeutet dies im Zeitbereich, dass man sinc mit  $w := \mathcal{F}^{-1}W$  multipliziert. Hat  $W$  gute Differenzierbarkeitseigenschaften, so fallen die Werte  $w(t)$  schnell, wenn  $|t|$  groß wird. Für große  $|t|$  setzt man dann  $s_1(t) = 0$  und ansonsten  $s_1(t) = w(t) \cdot A \text{sinc}(2\pi Bt)$ . Die Nullstellen von  $\text{sinc}(2\pi Bt)$  sind auch welche von  $s_1$ ; es tritt also keine Intersymbol Interference auf. Weil durch  $w$  mit zunehmendem  $|t|$  die Werte von  $\text{sinc}(2\pi Bt)$  stark gedämpft werden, ist die Decodierung gegenüber Jitter nicht mehr so sehr empfindlich. Allerdings ist die benötigte Bandbreite etwas größer als  $B$  geworden.

### 13.3.3 Gaußsches Rauschen

Für Übertragungskanäle, die durch weißes Gaußsches Rauschen mit Varianz  $\sigma$  gestört sind, gibt es stochastische Untersuchungen, welche Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_{\text{err}}$  bei binärer Datenübertragung in Abhängigkeit von dem sog. *Signal-Rausch-Verhältnis*  $\frac{A}{\sigma}$  (*Signal-to-Noise-Ratio, SNR*) theoretisch erreichbar ist.



#### 13.3.3.1 Fazit:

Bei gegebener Rauschvarianz  $\sigma$  kann man die Fehlerwahrscheinlichkeit nur durch Erhöhung der Signalamplitude  $A$  verkleinern. Das bedeutet, dass der Sender mehr Leistung aufbringen muss oder dass man größere Antennen mit mehr Gewinn verwenden muss. Dies ist für terrestrische Funk- oder Kabelverbindungen in gewissen Grenzen machbar. Die Grenzen sind einerseits technischer Natur, andererseits aber auch per Gesetz vorgegeben (EMV-Gesetz, extreme Leistungsbeschränkung für Funkkommunikation über kurze Distanz wie Bluetooth).

Bei Funkverbindungen von Satelliten oder Raumfahrzeugen zur Erde kann weder die Sendeantenne beliebig vergrößert, noch die Sendeleistung beliebig erhöht werden; die GPS-Satelliten haben z.B. nur 20 Watt Sendeleistung und sind etwa 20000 km von der Erde entfernt. Zu interstellaren Raumfahrzeugen ist außerdem die Streckendämpfung wegen der großen Entfernungen enorm hoch.

Für all diese Fälle muss man andere Modulations- und Codierungsverfahren einsetzen.

## 13.4 Mehrwertige Datenübertragung

**13.4.1 Idee:** Stelle die Daten nicht als 0-1-Folge dar, sondern als Folge  $(d_n)_n$  von Zeichen aus einem Alphabet mit  $M > 2$  Elementen dar und übertrage  $d_n$  durch einen von  $M$  verschiedenen Signalpegeln während des  $n$ -ten Zeitrasterintervalls. Es sei eine Pulsform ohne Intersymbol Interference gewählt.

Meist wählt man  $M = 2^m$ . Dann kann man eine binäre Datenfolge in Blöcke der Länge  $m$  zerhacken. Jeden dieser Blöcke kann man durch ein Zeichen des  $M$ -wertigen Alphabets codieren. Dadurch erhöht sich die Datenübertragungsrate auf  $R = 2Bm = B \log_2 M^2$  bit/s bei  $B$  Hz Bandbreite.

Die Amplitudenpegel seien  $\pm \frac{a}{2}, \pm \frac{3a}{2}, \dots, \pm (M-1) \frac{a}{2}$ . Alle Amplitudenpegel seien gleichwahrscheinlich. Dann ist die mittlere Leistung des Signals

$$S = \frac{2}{M} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{(M-1)a}{2} \right)^2 \right) = a^2 \frac{M^2-1}{12}$$

also

$$M^2 = 1 + \frac{12S}{a^2}$$

und somit

$$R = B \log_2 \left( 1 + \frac{12S}{a^2} \right)$$

### 13.4.2 Fazit:

Die Datenübertragungsrate wächst

1. linear mit der Bandbreite  $B$
2. logarithmisch mit  $\frac{S}{a^2}$

Einer Erhöhung der Leistung  $S$  und der Bandbreite  $B$  sind in der Praxis Grenzen gesetzt. Eine größere Datenrate kann man nur durch Verkleinerung der Amplitudenstufenhöhe  $a$  erreichen. Dadurch wird die Decodierung aber empfindlicher gegenüber Störungen. Es ist naheliegend zu vermuten, dass deshalb bei gegebenem Störpegel die Wahrscheinlichkeit für Übertragungsfehler nicht beliebig verkleinert werden kann. Dies ist jedoch so nicht richtig! Shannon zeigte, dass man die Daten nur in geeigneter Weise codieren muss, bevor man sie durch den Kanal überträgt. Wir formulieren hier seinen Satz ein wenig vage, ohne alle Begriffe exakt zu definieren.

### 13.4.3 SHANNONS Kanalcodierungssatz

$B$  sei Bandbreite eines Kanals, der durch weißes Gaußsches Rauschen gestört ist.  $N$  sei die mittlere Rauschleistung und  $S$  sei die Signalleistung. Dann gilt für die sogenannte Kanalkapazität  $C := B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$  folgende Aussage:

Für jedes  $\rho < C$  und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es Codierungen mit einer Datenrate  $R$ , so dass  $\rho < R < C$  gilt und die Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_{\text{err}}$  kleiner als  $\epsilon$  ist.

**Zusatz:** Für  $\rho > C$  ist die Aussage nicht richtig.

**Fazit:** Ein Kanal hat eine charakteristische Größe, nämlich seine Kapazität  $C$ . Die Übertragung von Daten durch den Kanal kann für Datenraten unterhalb der Kapazität beliebig sicher gemacht werden, indem man die Daten geeignet codiert. Für jede Datenrate oberhalb der Kanalkapazität bleiben die Fehlerwahrscheinlichkeit von Null weg beschränkt.

**13.4.4 Beispiel** Betrachte obige  $M$ -wertige Datenübertragung. Die Rauschleistung des Kanals ist proportional zur Varianz  $\sigma^2$  des Rauschens; wir setzen einfach  $N = \sigma^2$  und definieren  $K := \frac{S}{\sigma^2}$ . Man kann  $K$  als Signal-Rausch-Verhältnis ansehen. Es gilt

$$R = B \log_2 \left( 1 + \frac{12S}{K^2 N} \right)$$

Im binären Fall gilt  $\frac{4}{\sigma^2} \approx 9.2$  für  $p_{\text{err}} = 10^{-5}$ . Wir setzen nun entsprechend  $K = \frac{a}{\sigma} = 9.2$ . Dann gilt  $K^2 \approx 84$ , also  $\frac{12}{K^2} \approx \frac{1}{7}$ ; d.h. die Datenrate dieser Codierung erreicht nur ein Siebtel der Kanalkapazität.

### 13.4.5 Quadratur-Amplituden-Modulation, QAM

**Idee:** Verwende zur Codierung der Daten nicht nur Amplitudenunterschiede, sondern auch Phasenunterschiede des Trägersignals. Stelle also jedes Zeichens des Alphabets durch einen bestimmten Amplitudenpegel und eine bestimmte Phasenlage dar.

Das Trägersignal ist i.A. sinusförmig. Die unterschiedlichen Phasenlagen kann man als Linearkombination eines Sinus- und eines Cosinussignals bekommen. Daher der Name QAM.

Die möglichen Zustände des Trägersignals kann man als komplexe Zahlen auffassen, indem man den Amplitudenpegel als Betrag und die Phasenlage als Winkel nimmt. Weil man jetzt im Zweidimensionalen ist, kann man die  $M$  Zustände so verteilen, dass größere gegenseitige Abstände haben, als dies bei gleicher maximaler Signalleistung (d.h. gleicher maximaler Amplitude) für die reine  $M$ -wertige Amplitudenmodulation möglich ist.

Zur Decodierung misst man Amplitude und Phasenlage, z.B. mittels eines Costas-Mischers, und wählt den nächstgelegenen der  $M$  vorgegebenen Zustände in  $\mathbb{C}$ .

QAM ist gut geeignet für bandbreitenbeschränkte Anwendungen ohne allzu strikte Leistungsbeschränkung, also relativ hohem Signal-Rausch-Verhältnis.

QAM ist nicht gut geeignet für stark leistungsbeschränkte Anwendungen mit sehr kleinem SNR wie z.B. für Funkübertragungen zu Raumfahrzeugen.

## 13.5 Breitbandige Datenübertragung mit orthogonalen Signalen

**13.5.1 Idee:** Wähle  $M$  zueinander orthogonale Signale  $s_1, \dots, s_M$  mit Träger in  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  und ordne jedem Zeichen des Datenalphabets eines dieser Signale zu. Sende in jedem Zeitintervall das dem jeweiligen Zeichen der Datenfolge entsprechende Signal.

Statt die  $M$  Signalzustände im 1- oder 2-dimensionalen Raum wie bei AM oder QAM zu verteilen, geht man in einem  $M$ -dimensionalen Raum, wo man bei gleicher Maximalamplitude größere Abstände zwischen ihnen erreichen kann. Dadurch dass man sie im  $M$ -dimensionalen sogar orthogonal zueinander wählen kann, wird die Decodierung einfach und recht unempfindlich gegenüber Störungen.

Zur Decodierung bestimmt man für das empfangene Signal  $f$  in jedem Zeitintervall  $I_n = [(n - \frac{1}{2})T, (n + \frac{1}{2})T]$ , für welches  $j$  das Integral  $\int_{I_n} f(t) s_j(t) dt$  maximal wird. Wegen der Orthogonalität ist das Maximum meist sehr ausgeprägt, selbst bei Störungen auf dem Kanal. Allerdings muss der Decoder dafür zeitlich synchron zum Sender arbeiten.

### 13.5.2 Beispiel

Wähle  $M$  verschiedene Frequenzen  $\nu_1, \dots, \nu_M$ , deren gegenseitiger Abstand  $|\nu_k - \nu_j|$  größer als  $\frac{1}{T}$  ist.

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine glockenförmige Funktion, die außerhalb  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  recht klein ist und deren Fouriertransformierte  $\hat{h}$  außerhalb von  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$  ebenfalls recht klein ist.

Setze  $s_j(t) = h(t) \sin 2\pi\nu_j T$ . Dann sind die  $s_j$  annähernd orthogonal zueinander, weil annähernd  $\int_{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}} s_k(t) s_j(t) dt = 0$  für  $k \neq j$ .

Statt zu jedem Zeitpunkt nur eines der Signale  $s_j$  zu senden, kann man auch  $\log_2 M$  gleichzeitig senden, um z.B. die einzelnen Bits der Zeichen eines  $M$ -elementigen Alphabets zu codieren.

Die Datenrate beträgt  $R = \frac{1}{T} \log_2 M$  bit/s, und für die Bandbreite gilt  $B \approx \frac{1}{T} 2^{RT}$  und  $\frac{M}{T} \leq B \leq \frac{2M}{T}$ . Die Bandbreite ist also vergleichsweise groß! Daher eignet sich diese Art der Modulation nur für höhere Frequenzbereiche (GHz), wo ausreichend Bandbreite zur Verfügung steht.

### 13.5.3 Ein Kanal mit thermischem Rauschen

Wir betrachten einen Kanal, bei dem die Störungen durch thermisches Rauschen verursacht werden. Dies ist typisch für Kommunikationskanäle zu weit entfernten Raumfahrzeugen.

Die thermische Rauschleistung ist bandbreitenabhängig; sie beträgt  $N = kTB$ , wobei  $k$  die Boltzmannkonstante ist (circa  $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/°K),  $T$  die Temperatur in Kelvin,  $B$  die Bandbreite in Hz. Wir setzen  $n_0 = kT$ ; das ist die Rauschleistung pro Hz.

### 13.5.4 SHANNON-Kapazität

Die Kapazität eines solchen Kanals hat SHANNON berechnet zu

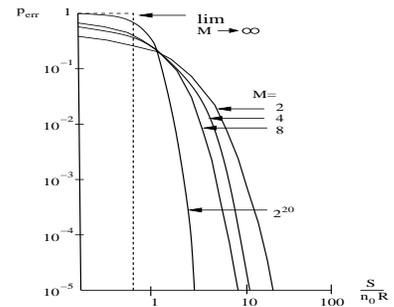
$$C_B = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{kTB} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{n_0 B} \right)$$

Daraus lässt sich ableiten

$$C_\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} C_B \approx \frac{S}{0.69 n_0}$$

Und es gilt stets  $C_B \leq \frac{S}{0.69 n_0}$ .

Mit Hilfe statistischer Entscheidungstheorie kann man die Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_{\text{err}}$  für die Übertragung mit  $M$  orthogonalen Signalen in Abhängigkeit von  $\frac{S}{n_0 R}$  und von  $M$  berechnen. Bemerkenswert ist, dass für  $M \rightarrow \infty$  keine Verbesserung mehr eintritt, wenn  $R \geq \frac{S}{0.69 n_0}$ .



### 13.5.5 Einige Daten von früheren Raumsonden

Mariner 10:  $R = 100 \text{ kbit/s}$ ,  $\frac{S}{n_0} = 54.7 \text{ dB}$ ,  $p_{\text{err}} = 0,05$ . Entfernung circa 160 Millionen km. Sendeleistung 20 Watt bei 2,3 GHz. Antennendurchmesser 1,35 m mit 27 dB Gewinn. Antennendurchmesser der Bodenstation 64 m.

Voyager:  $R = 115 \text{ kbit/s}$ ,  $p_{\text{err}} = 0,005$ . Entfernung circa 1 Milliarde km. Antennendurchmesser 3,66 m mit 48 dB Gewinn, Sendeleistung 420 Watt bei 8,415 GHz.

## 13.6 Spreizspektrum-Techniken

Um in einem vorgegebenen Frequenzbereich möglichst viele verschiedene Sender ohne gegenseitige Störung unterzubringen, wählt man meist möglichst schmalbandige Modulationsverfahren und verteilt die Sendefrequenzen so, dass sie die Senderspektren aneinander grenzen, sich aber nicht überlappen.

Es gibt jedoch Situationen, in denen man genau das Gegenteil tut: Man wählt Modulationsverfahren, die ein extrem breitbandiges Signal erzeugen. Solche Modulationen nennt man *Spreiz-Spektrum-Verfahren*. Sie haben Eigenschaften, die vor allem für militärische Anwendungen und Kommunikation über Satelliten interessant sind, aber auch für Datenübertragungen mobiler Geräte über kurze Distanzen.

### 13.6.1 Typische Eigenschaften von Spreiz-Spektrum-Verfahren

**13.6.1.1** Die Sendeenergie wird über einen großen Frequenzbereich verteilt. In einem schmalbandigen Empfänger kommt davon nur sehr wenig an. Er wird deshalb kaum gestört. Meist wird er das Spreiz-Spektrum-Signal nicht einmal bemerken, höchstens einen leichten Anstieg des Rauschens. Er hat keine Möglichkeit, das Signal zu demodulieren.

**13.6.1.2** Im Empfänger wird aus dem breitbandigen Spreiz-Spektrum-Signal wieder das schmalbandigere Basisbandsignal zurückgewonnen. Der Demodulator macht dabei umgekehrt aus einem schmalbandigen Signal, das dem Spreiz-Spektrum-Signal eventuell überlagert ist, ein sehr breitbandiges Signal, das durch ein Tiefpassfilter, welches das Basisbandsignal passieren lässt, fast vollständig eliminiert wird. Folglich werden Spreiz-Spektrum-Verfahren durch schmalbandige Störsignale kaum beeinflusst. Allerdings gilt dies nur, wenn der Dynamikbereich der Eingangsstufen des Empfängers sehr hoch ist, wenn er also sehr schwache und sehr starke Signale gleichzeitig mit hoher Linearität verarbeiten kann.

**13.6.1.3** Durch geeignete Parameterwahl bei der Erzeugung von Spreiz-Spektrum-Signalen kann man erreichen, dass sich Signale gegenseitig kaum beeinflussen, obwohl sie denselben Frequenzbereich belegen. Sie sind

dann also in gewissem Sinne fast orthogonal zueinander, allerdings nicht dadurch, dass ihre Spektren disjunkte Träger haben wie bei traditionellen Mehrfrequenzverfahren.

### 13.6.2 Methoden

#### 13.6.2.1 Direct-Sequence Spread Spectrum DSSS

Man mischt das Basisbandsignal  $g$  mit einem *Pseudozufallssignal*  $f_o$ . Das ist meist ein binäres Signal, dessen Werte eine Pseudozufallsfolge sind, die in einem festen Zeitraster erzeugt wird (pseudo random, pseudo noise). Wenn die Folge gute statistische Zufallseigenschaften hat, hat das Signal  $f_o$  eine große Bandbreite (theoretisch unendlich) mit flacher Spektralverteilung. Das Spreiz-Spektrum-Signal  $g \cdot f_o$  hat dann ebenfalls eine große Bandbreite. Wir nehmen an, dass  $f_o$  bipolar ist, also  $+1$  und  $-1$  als Werte hat. Dann entsteht das Spreiz-Spektrum-Signal  $g \cdot f_o$  dadurch, dass die Phase von  $g$  im Rhythmus von  $f_o$  um  $180^\circ$  umgeschaltet wird.

Zur Demodulation muss man nur wieder mit  $f_o$  multiplizieren, denn  $g \cdot f_o \cdot f_o = g$  (wie bei der XOR-Verschlüsselung mit einer Zufallsfolge in der Kryptografie).

Die Pseudozufallsfolge ist natürlich nicht wirklich zufällig, sondern wird algorithmisch erzeugt, oft mit Hilfe eines rückgekoppelten Schieberegisters.

#### 13.6.2.2 Frequency Hopping Spread Spectrum FHSS

Man wählt ein klassisches Modulationsverfahren (AM, FM, PM), um das Basisbandsignal  $g$  auf ein Trägersignal  $f_c$  aufzumodulieren. Allerdings wird die Frequenz von  $f_c$  mehrmals pro Sekunde geändert, und zwar wählt man sie gemäß den Werten einer (mehrwertigen) Pseudozufallsfolge aus einer vorgegebenen Liste aus. Im Empfänger wird die Empfangsfrequenz im gleichen Zeitraster entsprechend umgeschaltet. Man kann also einen üblichen schmalbandigen Empfänger benutzen, dessen VFO-Frequenz schnell umgeschaltet werden kann (Mit Oszillatoren nach dem DDS-Prinzip ist das kein Problem).

#### 13.6.2.3 Chirp, Pulse-FM

Man mischt das Basisbandsignal  $g$  mit einem Chirp-Signal  $f_c$ , das periodisch wiederholt wird. Meist wählt man für  $f_c$  eine Sinusschwingung, deren Frequenz linear mit der Zeit über einen vorgegebenen Bereich wächst oder fällt. Im Empfänger kann man mit einem entsprechenden Matched Filter das Basisbandsignal zurückgewinnen. Diese Chirp-Modulation wird vor allem bei Radar angewendet. Signale, die so moduliert sind, lassen sich mit Spektrumanalysatoren leicht entdecken.

#### 13.6.2.4 Hybridverfahren

Obige Verfahren können kombiniert werden.

### 13.6.3 Synchronisationsproblem

Der Demodulator muss die Pseudozufallsfolge synchron zu der des empfangenen Signals erzeugen. Das ist schwierig, wenn der Empfänger nicht den genauen Zeitpunkt kennt, an dem der Modulator mit der Erzeugung der Folge begonnen hat. Außerdem tritt noch eine Zeitverzögerung infolge der endlichen Übertragungsgeschwindigkeit auf. Sie hängt von der von der Länge des Übertragungswegs ab und ist bei Funkübertragung nicht genau vorhersagbar und auch zeitlich nicht unbedingt konstant. Deshalb muss man für Spreiz-Spektrum-Systeme grundsätzlich eine Synchronisationsmöglichkeit vorsehen. Dafür wählt man für die Pseudozufallsfolge eine Folge aus, deren Autokorrelationsfunktion ein ausgeprägtes Maximum bei 0 hat, d.h. dass die Folge bei Verschiebung zu sich selbst sehr unähnlich wird und eine sehr geringe Korrelation aufweist. Die in der Praxis verwendeten Folgen sind periodisch, allerdings mit oft mit einer sehr langen Periode, so dass die Synchronisation mittels der Autokorrelation lange dauern würde. Deshalb baut man in der Praxis noch Möglichkeiten ein, z.B. über zusätzliche kürzere Folgen am Anfang einer Sendung schneller synchronisieren zu können.

### 13.6.4 Orthogonalität

Um in demselben Frequenzbereich viele Spreiz-Spektrum-Signale gleichzeitig ohne gegenseitige Störung übertragen zu können, verwendet man für die einzelnen Signale unterschiedliche Pseudozufallsfolgen, deren Kreuzkorrelation sehr gering ist. Die Folgen selbst und auch deren zeitlich verschobene Versionen sind also nahezu orthogonal bezüglich des  $L_2$ -Skalarprodukts. Eine Familie von Folgen mit dieser Eigenschaft sind die sog. Gold-Codes (nach Robert Gold 1967). Sie werden u.a. bei UMTS, WLAN und bei der GPS-Navigation verwendet. Jeder Satellit verwendet eine eigene spezifische Folge. Die ausgesendeten Signale aller Satelliten belegen denselben, 20 MHz breiten Frequenzbereich.

Gold, R. (1967), Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing (Corresp.), IEEE Transactions on Information Theory, 13 (4), pp. 619-621.

Das Bluetooth-Verfahren zur Datenübertragung über kurze Distanzen verwendet auch Spreiz-Spektrum-Technik, allerdings Frequency Hopping mit 79 Frequenzen im Bereich 2.402 GHz bis 2.480 GHz mit 1600 Frequenzwechseln pro Sekunde und der sehr geringen Leistung von circa 1 mW.

**13.6.5 Bemerkung** Mit Spreiz-Spektrum-Verfahren oder orthogonalen Mehrfrequenzverfahren kann man Datenraten erreichen, die schon nahe an der Shannonschen Kanalkapazität liegen.